

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

УТВЕРЖДАЮ
Директор по образовательной
деятельности

_____ С.Т. Князев
«__» _____

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ

Код модуля	Модуль
1156268	Анализ функций одного и нескольких переменных

Екатеринбург

Перечень сведений о рабочей программе модуля	Учетные данные
Образовательная программа 1. Математика 2. Механика и математическое моделирование 3. Прикладная математика	Код ОП 1. 01.03.01/33.01 2. 01.03.03/33.01 3. 01.03.04/33.01
Направление подготовки 1. Математика; 2. Механика и математическое моделирование; 3. Прикладная математика	Код направления и уровня подготовки 1. 01.03.01; 2. 01.03.03; 3. 01.03.04

Программа модуля составлена авторами:

№ п/п	Фамилия Имя Отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Арестов Виталий Владимирович	доктор физико-математических наук, профессор	Профессор	математического анализа

Согласовано:

Управление образовательных программ

Р.Х. Токарева

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МОДУЛЯ Анализ функций одного и нескольких переменных

1.1. Аннотация содержания модуля

Цель модуля – изложить в естественной полноте и целостности дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных, включая векторный анализ. Научить основополагающим принципам и фактам математического анализа; продемонстрировать красоту и возможности этих методов для решения задач фундаментальной и прикладной математики; привить точность и обстоятельность аргументации в математических рассуждениях; научить пользоваться математической литературой; привить желание и навыки исследовательской работы. В нем закладывается основа знаний и навыков непрерывной математики, понимание эффективности ее методов. Он поддерживает все последующие курсы по непрерывной математике, способствуют формированию математической культуры для получения базового математического образования, позволяющего выпускнику быть востребованным в различных областях, где требуется применение непрерывных методов математического моделирования, в том числе в исследовательской деятельности

1.2. Структура и объем модуля

Таблица 1

№ п/п	Перечень дисциплин модуля в последовательности их освоения	Объем дисциплин модуля и всего модуля в зачетных единицах
1	Математический анализ	23
ИТОГО по модулю:		23

1.3. Последовательность освоения модуля в образовательной программе

Пререквизиты модуля	Не предусмотрены
Постреквизиты и кореквизиты модуля	1. Кратные интегралы и функциональные ряды

1.4. Распределение компетенций по дисциплинам модуля, планируемые результаты обучения (индикаторы) по модулю

Таблица 2

Перечень дисциплин модуля	Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения (индикаторы)
1	2	3
Математический	ОПК-1 - Способен использовать	З-1 - Демонстрировать понимание основных закономерностей, законов, теорий

анализ	<p>фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности</p>	<p>математики, их взаимосвязь с другими дисциплинами</p> <p>З-2 - Интерпретировать основные теоретические положения фундаментальных разделов естественных наук, необходимые для освоения компетенций по профилю деятельности</p> <p>У-1 - Определять пути решения задач профессиональной деятельности, опираясь на знания основных закономерностей, законов, теории математики</p> <p>П-1 - Демонстрировать навыки применения простейших математических теорий и моделей для решения задач профессиональной деятельности</p> <p>Д-1 - Демонстрировать навыки самообразования</p>
	<p>ОПК-2 - Способен проводить под научным руководством исследования на основе современных методов в конкретной области профессиональной деятельности</p>	<p>З-1 - Демонстрировать понимание теоретических основ методов, используемых для проведения научных исследований в профильной области</p> <p>У-1 - Соотносить цель и задачи исследования с набором методов исследования, выбирать необходимое сочетание цели и средств</p> <p>П-1 - Иметь опыт выполнения стандартных исследований с использованием серийного научного и технологического оборудования, стандартной методологии и методов исследований</p> <p>Д-2 - Проявлять заинтересованность в содержании и результатах исследовательской работы</p>
	<p>ОПК-3 - Способен систематизировать, анализировать и обобщать результаты научных исследований на основе информационной и библиографической культуры</p>	<p>З-1 - Демонстрировать понимание принципов анализа и обобщения результатов научных исследований</p> <p>З-2 - Формулировать требования к оформлению результатов исследований</p> <p>У-1 - Систематизировать и анализировать результаты экспериментов, наблюдений, измерений</p> <p>У-2 - Оформлять результаты исследовательской деятельности в виде</p>

		<p>обзоров литературы, справок, методик в соответствии с принятыми в профессиональной области требованиями</p> <p>П-1 - Иметь опыт представления обобщенных результатов исследовательской деятельности и их оформления в виде текстовых, графических и иных материалов в соответствии с требованиями</p> <p>П-2 - Иметь опыт написания обзоров литературы, справок, методик экспериментов, описания и обсуждения результатов экспериментов на основе информационной и библиографической культуры</p> <p>Д-1 - Демонстрировать развитие когнитивных умений</p>
--	--	---

1.5. Форма обучения

Обучение по дисциплинам модуля может осуществляться в очной формах.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Математический анализ

Рабочая программа дисциплины составлена авторами:

№ п/п	Фамилия Имя Отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Арестов Виталий Владимирович	доктор физико- математических наук, профессор	Профессор	математического анализа
2	Глазырина Полина Юрьевна	кандидат физико- математических наук, доцент	Заведующий кафедрой	математического анализа

Рекомендовано учебно-методическим советом института Естественных наук и математики

Протокол № 2 от 13.04.2021 г.

1. СОДЕРЖАНИЕ И ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСЦИПЛИНЫ

Авторы:

- Арестов Виталий Владимирович, Профессор, математического анализа
- Глазырина Полина Юрьевна, Заведующий кафедрой, математического анализа

1.1. Технологии реализации, используемые при изучении дисциплины модуля

- Традиционная (репродуктивная) технология
- Разноуровневое (дифференцированное) обучение
 - Базовый уровень

**Базовый I уровень – сохраняет логику самой науки и позволяет получить упрощенное, но верное и полное представление о предмете дисциплины, требует знание системы понятий, умение решать проблемные ситуации. Освоение данного уровня результатов обучения должно обеспечить формирование запланированных компетенций и позволит обучающемуся на минимальном уровне самостоятельности и ответственности выполнять задания;*

Продвинутый II уровень – углубляет и обогащает базовый уровень как по содержанию, так и по глубине проработки материала дисциплины. Это происходит за счет включения дополнительной информации. Данный уровень требует умения решать проблемы в рамках курса и смежных курсов посредством самостоятельной постановки цели и выбора программы действий. Освоение данного уровня результатов обучения позволит обучающемуся повысить уровень самостоятельности и ответственности до творческого применения знаний и умений.

1.2. Содержание дисциплины

Таблица 1.1

Код раздела, темы	Раздел, тема дисциплины*	Содержание
1.	Предмет математического анализа	Функциональная зависимость. Задача исследования поведения функции. Основные этапы становления дифференциального и интегрального исчисления.
2.	Элементы теории множеств и математической логики	Операции над множествами; декартово произведение множеств. Бинарные отношения. Отображения (функции); классификация отображений; композиция отображений (сложная функция); обратное отображение. Мощности множества; счетное множество, множество мощности континуума. Элементы математической логики: логические операции, предикаты, кванторы. Метод математической индукции.
3.	Вещественные числа	Построение конкретной модели множества вещественных чисел. Арифметические операции во множестве вещественных чисел и их свойства. Принцип Архимеда. Принципы полноты множества вещественных чисел: принцип вложенных отрезков, существование верхней и нижней граней числового множества.
4.	Последовательность вещественных чисел и ее предел	Последовательности вещественных чисел. Предел последовательности: определение, основные свойства. Критерий Коши существования предела последовательности. Подпоследовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности. Верхний и

		нижний пределы последовательности. Предел монотонной последовательности. Число ϵ .
5.	Топология числовой прямой	Предельная, внутренняя, изолированная, граничная точки множества; открытые и замкнутые множества; лемма Бореля о покрытиях; компактные множества.
6.	Предел вещественной функции одного вещественного переменного	Предел вещественной функции одного вещественного переменного: два эквивалентных определения; арифметические свойства предела; свойства предела, связанные с неравенствами. Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы. Теоремы об односторонних пределах монотонной функции. Некоторые конкретные (замечательные) пределы. Сравнение поведения функций; символы "o", "O", эквивалентность; основные эквивалентности.
7.	Непрерывность функции в точке и на множестве	Непрерывность функции в точке и на множестве. Определение непрерывности функции в точке; локальные свойства непрерывных функций. Арифметические операции над функциями, непрерывными в точке. Непрерывность и предел сложной функции. Точки разрыва; классификация точек разрыва; характер разрывов монотонной функции. Теорема о промежуточных значениях функций, непрерывных на отрезке (промежутке). Ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений функций, непрерывных на отрезке (компактном множестве). Непрерывность функции, обратной монотонной. Равномерная непрерывность функции, непрерывной на отрезке (компактном множестве); модуль непрерывности функции. Основные элементарные функции: построение, свойства, непрерывность.
8.	Дифференцируемость вещественной функции одного вещественного переменного	Дифференцируемость; производная и дифференциал функции в точке; геометрический, механический и физический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Таблица производных элементарных функций. Производные и дифференциалы высших порядков; формула Лейбница.
9.	Основные теоремы для дифференцируемых функций	Теоремы Ферма, Ролля; теоремы Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Теорема о пределе производной; характер разрывов производной. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей.
10.	Формула Тейлора	Формула Тейлора (с остаточными членами в форме Пеано, Лагранжа, Коши). Формула Тейлора для основных элементарных функций с информативным представлением остаточных членов.
11.	Применение дифференциального исчисления к исследованию функций	Необходимое и достаточное условие постоянства функции на промежутке. Монотонность; критерий монотонности и строгой монотонности дифференцируемой функции на промежутке. Экстремумы; необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма); достаточные условия локального экстремума функции в точке в терминах поведения первой производной функции в окрестности точки. Выпуклость функции на

		<p>промежутке; гладкостные свойства выпуклых функций; критерий выпуклости дифференцируемой функции; условие выпуклости дважды дифференцируемой функции; положение касательной относительно графика выпуклой функции. Точка перегиба. Достаточные условия точки локального экстремума и точки перегиба в терминах знака старших производных в точке. Асимптоты. Применение свойства выпуклости для доказательства некоторых классических неравенств.</p>
12.	Неопределенный интеграл	<p>Первообразная, неопределенный интеграл и их свойства.</p> <p>Таблица неопределенных интегралов элементарных функций. Замена переменного. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций, квадратических иррациональностей (подстановки Эйлера), дифференциальных биномов, рациональных тригонометрических функций.</p>
13.	Определенный интеграл Римана по отрезку	<p>Определенный интеграл Римана по отрезку. Ограниченность интегрируемой функции. Суммы Дарбу; критерии интегрируемости Дарбу и Римана. Классы интегрируемых функций: непрерывные, монотонные, ограниченные с множеством точек разрыва жордановой меры ноль. Множество лебеговой меры ноль. Критерий интегрируемости ограниченной функции (теорема Лебега). Свойства интеграла по функции: линейность интеграла, интегрируемость произведения, частного; интегрируемость сложной функции. Аддитивность интеграла по множеству. Оценки интегралов; первая теорема о среднем. Интеграл как функция верхнего предела: непрерывность и дифференцируемость. Существование первообразной непрерывной функции на промежутке. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменного. Интегрирование по частям. Вторая теорема о среднем значении для интеграла Римана.</p>
14.	Приложения интеграла	<p>Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши. Числовое неравенство Юнга; неравенства Гёльдера, Минковского и Йенсена для сумм и интегралов. Геометрические приложения интеграла. Кривая; спрямляемость; спрямляемость и длина гладкой (кусочногладкой) кривой. Мера Жордана в R^2 (R^n). Условие квадратуемости множества в терминах его границы. Свойства площади (плоской меры Жордана). Квадратуемость подграфика интегрируемой функции; вычисление площади.</p> <p>Механические и физические приложения интеграла.</p>
15.	Метрическое, линейное нормированное пространство	<p>Метрическое пространство. Сходимость последовательности элементов метрического пространства. Основные топологические понятия и свойства множеств в метрическом пространстве: предельная, изолированная, внутренняя, граничная точки множества; открытые и замкнутые множества. Компактность множеств метрического пространства, секвенциальная компактность, связь с ограниченностью и</p>

		замкнутостью. Полнота метрического пространства; принцип вложенных шаров. Принцип сжимающего отображения полного метрического пространства.
16.	Пространство R^n	Линейное нормированное пространство. Классические нормы в пространстве R^n . Сходимость последовательности элементов пространства R^n по норме и по координатам. Полнота пространства R^n . Лемма Бореля о покрытии. Характеризация компактов в R^n .
17.	Функции многих переменных	Функции многих переменных. Предел функции в точке. Повторные пределы; связь предела и повторных пределов. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных на множествах: теоремы Больцано–Коши о промежуточном значении на связном множестве, Вейерштрасса об ограниченности функции и достижении ею верхней и нижней граней на компактном множестве, Кантора о равномерной непрерывности функции.
18.	Дифференцируемость функции нескольких переменных	Дифференцируемость вещественной функции нескольких вещественных переменных. Частные производные. Дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению, градиент; касательная плоскость и нормаль к поверхности. Дифференцируемость сложной функции. Частные производные и дифференциалы высших порядков; условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.
19.	Экстремум функции нескольких переменных	Локальный (безусловный) экстремум. Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма). Достаточное условие локального экстремума.
20.	Неявные функции. Условный экстремум функции нескольких переменных	Неявные функции одного и нескольких переменных: существование, непрерывность, дифференцируемость. Отображения R^n в R^m : непрерывность, дифференцируемость, матрица производной; якобиан. Неявное отображение, заданное системой; локальное обращение отображения R^n в R^n . Условный экстремум; метод неопределенных множителей Лагранжа.
21.	Числовые ряды	Числовой ряд; сходимость числового ряда. Необходимое условие сходимости. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимость. Знакопостоянные ряды; признак сравнения сходимости (расходимости); признаки сходимости: Даламбера, Коши, Раабе, интегральный признак Коши, Маклорена. Ряд Лейбница: сходимость, оценка остатка. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов. Операции над рядами: группировка членов сходящегося ряда; перестановка членов абсолютно сходящегося ряда; теорема Римана о перестановке членов условно сходящихся рядов; умножение рядов. Методы суммирования Чезаро и Абеля. Кратные ряды (основные понятия). Бесконечные произведения, необходимое условие сходимости; связь со сходимостью числовых рядов.

22.	Функциональные последовательности и ряды	Функциональные последовательности и ряды. Поточечная сходимость. Равномерная сходимость: понятие; критерий Коши. Необходимое условие, мажорантный признак Вейерштрасса, признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов. Почленный переход к пределу; непрерывность предельной функции. Теорема Дини. Почленное интегрирование и дифференцирование. Пространство $C[a,b]$ непрерывных на отрезке функций с чебышевской нормой; его полнота.
23.	Степенные ряды	Степенные ряды. Множество сходимости (радиус сходимости, формула Коши-Адамара); характер сходимости; бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды (ряды Тейлора-Маклорена). Применение степенных рядов к приближенным вычислениям. Теорема Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывных функций алгебраическими многочленами. Бесконечные произведения функций; представление функции \sin в бесконечное произведение; разложения функций ctg и $1/\sin$ на простейшие дроби.
24.	Несобственные интегралы	Несобственные интегралы (по бесконечному промежутку и по конечному промежутку от неограниченных функций). Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости: сравнения, Абеля, Дирихле. Формула интегрирования по частям. Замена переменной.
25.	Семейства функций, зависящие от параметра. Собственные интегралы, зависящие от параметра	Семейства функций, зависящие от параметра. Поточечная сходимость. Равномерная сходимость; определения Коши и Гейне; критерий Коши. Переход к пределу по параметру. Перестановка двух предельных переходов (равенство повторных и двойного пределов). Непрерывность и интегрируемость равномерного предела. Дифференцируемость предела. Собственные интегралы, зависящие от параметра и их свойства: переход к пределу под знаком интеграла, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость по параметру.

1.3. Направление, виды воспитательной деятельности и используемые технологии

Таблица 1.2

Направление воспитательной деятельности	Вид воспитательной деятельности	Технология воспитательной деятельности	Компетенция	Результаты обучения
Профессиональное воспитание	учебно-исследовательская, научно-исследовательская	Технология формирования уверенности и готовности к самостоятельной	ОПК-2 - Способен проводить под научным руководством исследования на	Д-2 - Проявлять заинтересованность в содержании и результатах исследовательско

	ая	успешной профессиональной деятельности	основе современных методов в конкретной области профессиональной деятельности	й работы
--	----	--	---	----------

1.4. Программа дисциплины реализуется на государственном языке Российской Федерации .

2. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Математический анализ

Электронные ресурсы (издания)

1. Никольский, С. М.; Курс математического анализа : учебник.; Физматлит, Москва; 2001; <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69500> (Электронное издание)
2. Демидович, Б. П.; Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие.; ЧеРо, Москва; 1997; <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459722> (Электронное издание)

Печатные издания

1. Ильин, В. А., Тихонов, А. Т.; Математический анализ : учебник для вузов : в 2 ч. Ч. 1. ; Проспект, Москва; 2006 (31 экз.)
2. Ильин, В. А., Тихонов, А. Т.; Математический анализ : учебник для вузов. Ч. 2. ; Проспект, Москва; 2006 (30 экз.)
3. Зорич, В. А.; Ч. 2 : [учебник для университетов].; Наука, Москва; 1984 (63 экз.)
4. Кудрявцев, Л. Д.; Т. 1 : учебник для бакалавров.; Юрайт, Москва; 2012 (54 экз.)
5. Кудрявцев, Л. Д.; Т. 2 : учебник для бакалавров.; Юрайт, Москва; 2012 (52 экз.)
6. Кудрявцев, Л. Д.; Т. 3 : учебник для бакалавров.; Юрайт, Москва; 2012 (52 экз.)
7. , Бутузов, В. Ф.; Математический анализ в вопросах и задачах : [учебное пособие для вузов.; Высшая школа, Москва; 1984 (26 экз.)

Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы

1. Теляковский С. А. Курс лекций по математическому анализу. Семестр I, Лекц. курсы НОЦ, 11. – М.: МИАН, 2009. – 210 с. [Электронный ресурс <http://mi.mathnet.ru/lkn11>]
2. Теляковский С. А. Курс лекций по математическому анализу. Семестр II, Лекц. курсы НОЦ, 17. – М.: МИАН, 2011. – 194 с. [Электронный ресурс <http://mi.mathnet.ru/book1347>]
3. Теляковский С. А. Курс лекций по математическому анализу. Семестр III, издание 2-е, доработанное, Лекц. курсы НОЦ, 20. – М.: МИАН, 2013. – 242 с. [Электронный ресурс <http://mi.mathnet.ru/book1473>]

Материалы для лиц с ОВЗ

Весь контент ЭБС представлен в виде файлов специального формата для воспроизведения синтезатором речи, а также в тестовом виде, пригодном для прочтения с использованием экранной лупы и настройкой контрастности.

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

3. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Математический анализ

Сведения об оснащённости дисциплины специализированным и лабораторным оборудованием и программным обеспечением

Таблица 3.1

№ п/п	Виды занятий	Оснащённость специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения
1	Лекции	Мебель аудиторная с количеством рабочих мест в соответствии с количеством студентов Рабочее место преподавателя Доска аудиторная Периферийное устройство Подключение к сети Интернет	Office Professional 2003 Win32 Russian CD-ROM Свободное ПО: Mozilla Firefox
2	Практические занятия	Мебель аудиторная с количеством рабочих мест в соответствии с количеством студентов Рабочее место преподавателя Доска аудиторная	Не требуется
3	Лабораторные занятия	Мебель аудиторная с количеством рабочих мест в соответствии с количеством студентов Рабочее место преподавателя Доска аудиторная	Не требуется
4	Консультации	Мебель аудиторная с количеством рабочих мест в соответствии с количеством студентов	Office Professional 2003 Win32 Russian CD-ROM Свободное ПО: Mozilla Firefox

		<p>Рабочее место преподавателя</p> <p>Доска аудиторная</p> <p>Периферийное устройство</p> <p>Подключение к сети Интернет</p>	
5	Текущий контроль и промежуточная аттестация	<p>Мебель аудиторная с количеством рабочих мест в соответствии с количеством студентов</p> <p>Рабочее место преподавателя</p> <p>Доска аудиторная</p>	Не требуется
6	Самостоятельная работа студентов	<p>Мебель аудиторная с количеством рабочих мест в соответствии с количеством студентов</p> <p>Подключение к сети Интернет</p>	<p>Office Professional 2003 Win32 Russian CD-ROM</p> <p>Свободное ПО: Mozilla Firefox</p>