

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**
Гармонический анализ на сфере

Код модуля
1156265(1)

Модуль
Анализ на сфере

Екатеринбург

Оценочные материалы составлены автором(ами):

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Бабенко Александр Григорьевич	д. ф.-м. н., старший науч. сотр.	профессор	Кафедра математического анализа

Согласовано:

Управление образовательных программ

Ю.Д. Маева

Авторы:

- **Бабенко Александр Григорьевич, профессор, Кафедра математического анализа**

1. СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ Гармонический анализ на сфере

1.	Объем дисциплины в зачетных единицах	3	
2.	Виды аудиторных занятий	Лекции Практические/семинарские занятия	
3.	Промежуточная аттестация	Зачет	
4.	Текущая аттестация	Домашняя работа	2

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ (ИНДИКАТОРЫ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ Гармонический анализ на сфере

Индикатор – это признак / сигнал/ маркер, который показывает, на каком уровне обучающийся должен освоить результаты обучения и их предъявление должно подтвердить факт освоения предметного содержания данной дисциплины, указанного в табл. 1.3 РПМ-РПД.

Таблица 1

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения (индикаторы)	Контрольно-оценочные средства для оценивания достижения результата обучения по дисциплине
1	2	3
ПК-1 -Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, основ программирования и информационных технологий	З-1 - Привести примеры математических теорем, естественнонаучных законов, базовых понятий программирования и информационных технологий П-1 - Иметь практический опыт сбора информации в математических и естественных науках, основах программирования и информационных технологий У-1 - Обобщить полученные базовые математические знания, определить оптимальные методы программирования для решения профессиональных задач	Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2 Зачет Лекции Практические/семинарские занятия
ПК-2 -Способен создавать и	З-1 - Определять необходимые методы для создания новых	Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2

исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники	математических моделей с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники П-1 - Осуществлять обоснованный выбор методов математического моделирования для различных областей, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники У-1 - Анализировать разработанные математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе	Зачет Лекции Практические/семинарские занятия
--	--	---

3. ПРОЦЕДУРЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ В БАЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА БРС)

3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

1. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – 0.5		
Текущая аттестация на лекциях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>Мини-контрольные</i>	8,17	100
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – 0.5		
Промежуточная аттестация по лекциям – зачет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – 0.5		
2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – 0.5		
Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>домашняя работа 1</i>	8,8	50
<i>домашняя работа 2</i>	8,17	50
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям – 1		
Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям – нет		

Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям – не предусмотрено		
3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на лабораторных занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям - не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям – нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		
4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на онлайн-занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям - не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям – нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – не предусмотрено		

3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта

Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено		
Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено		

4. КРИТЕРИИ И УРОВНИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

4.1. В рамках БРС применяются утвержденные на кафедре/институте критерии (признаки) оценивания достижений студентов по дисциплине модуля (табл. 4) в рамках контрольно-оценочных мероприятий на соответствие указанным в табл.1 результатам обучения (индикаторам).

Таблица 4

Критерии оценивания учебных достижений обучающихся

Результаты обучения	Критерии оценивания учебных достижений, обучающихся на соответствие результатам обучения/индикаторам
Знания	Студент демонстрирует знания и понимание в области изучения на уровне указанных индикаторов и необходимые для продолжения

	обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Умения	Студент может применять свои знания и понимание в контекстах, представленных в оценочных заданиях, демонстрирует освоение умений на уровне указанных индикаторов и необходимых для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Опыт /владение	Студент демонстрирует опыт в области изучения на уровне указанных индикаторов.
Другие результаты	Студент демонстрирует ответственность в освоении результатов обучения на уровне запланированных индикаторов. Студент способен выносить суждения, делать оценки и формулировать выводы в области изучения. Студент может сообщать преподавателю и коллегам своего уровня собственное понимание и умения в области изучения.

4.2 Для оценивания уровня выполнения критериев (уровня достижений обучающихся при проведении контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля) используется универсальная шкала (табл. 5).

Таблица 5

Шкала оценивания достижения результатов обучения (индикаторов) по уровням

Характеристика уровней достижения результатов обучения (индикаторов)				
№ п/п	Содержание уровня выполнения критерия оценивания результатов обучения (выполненное оценочное задание)	Шкала оценивания		
		Традиционная характеристика уровня		Качественная характеристика уровня
1.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты в полном объеме, замечаний нет	Отлично (80-100 баллов)	Зачтено	Высокий (В)
2.	Результаты обучения (индикаторы) в целом достигнуты, имеются замечания, которые не требуют обязательного устранения	Хорошо (60-79 баллов)		Средний (С)
3.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты не в полной мере, есть замечания	Удовлетворительно (40-59 баллов)		Пороговый (П)
4.	Освоение результатов обучения не соответствует индикаторам, имеются существенные ошибки и замечания, требуется доработка	Неудовлетворительно (менее 40 баллов)	Не зачтено	Недостаточный (Н)
5.	Результат обучения не достигнут, задание не выполнено	Недостаточно свидетельств для оценивания		Нет результата

5. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

5.1. Описание аудиторных контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля

5.1.1. Лекции

Самостоятельное изучение теоретического материала по темам/разделам лекций в соответствии с содержанием дисциплины (п. 1.2. РПД)

5.1.2. Практические/семинарские занятия

Примерный перечень тем

1. Гармонические функции
2. Ядро Пуассона для шара
3. Оператор Лапласа – Бельтрами на сфере. Сферические и шаровые функции
4. Применение к краевым задачам
5. Положительная определенность

Примерные задания

Гармонические функции. Инвариантность гармонических функций относительно сдвига, растяжения и ортогональных преобразований.

1. Показать, что если u и v являются вещественнозначными гармоническими функциями, то uv являются гармонической тогда и только тогда, когда скалярное произведение $(\text{grad } u, \text{grad } v)$ равно нулю.
2. Предположим, что область Ω связна и u является такой вещественнозначной гармонической функцией на Ω , что u^2 – гармоническая. Доказать, что u является постоянной.
3. Верно ли такое утверждение без предположения, что u является вещественнозначной?
4. Пусть $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является таким линейным преобразованием, что $u \circ T$ является гармонической на \mathbb{R}^n для любой гармонической функции u на \mathbb{R}^n . Доказать, что T совпадает с ортогональным преобразованием (с точностью до скалярного множителя).

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2. Описание внеаудиторных контрольно-оценочных мероприятий и средств текущего контроля по дисциплине модуля

Разноуровневое (дифференцированное) обучение.

Базовый

5.2.1. Домашняя работа № 1

Примерный перечень тем

1. Сферические и шаровые функции

Примерные задания

Домашняя работа № 1. Сферические и шаровые функции.

1. Предположим, что p является полиномом на \mathbb{R}^n таким, что его сужение на единичную евклидову сферу \mathbb{S} тождественно равно нулю. Доказать, что существует такой полином q , что $p(x) = (1 - |x|^2)q(x)$.
2. Для функции f непрерывной на единичной сфере \mathbb{S} через $P[f]$ обозначим интеграл Пуассона, который задает функцию на единичном шаре формулой $P[f](x) = \int_{\mathbb{S}} f(\xi) P(x, \xi) d\xi$, где $P(x, \xi) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|}$ — ядро Пуассона для задачи Дирихле на единичном шаре евклидова пространства \mathbb{R}^n .
3. Пусть q — однородный многочлен на \mathbb{R}^n и $u = P[q|_{\mathbb{S}}]$. Доказать, что u является однородным полиномом той же самой степени, что и q тогда и только тогда, когда q является гармоническим.
4. Предположим, что f является однородным полиномом четной (соответственно, нечетной) степени на \mathbb{R}^n . Доказать, что $P[f]$ является полиномом, содержащим только члены четной (соответственно, нечетной) степени.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.2. Домашняя работа № 2

Примерный перечень тем

1. Применение сферических функций для решения краевых задач в сферически симметричных областях

Примерные задания

Домашняя работа № 2. Применение сферических функций для решения краевых задач в сферически симметричных областях

1. Показать, что $\Delta(|x|^t) = t(t + n - 2)|x|^{t-2}$, где $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Пусть f и g являются полиномами на \mathbb{R}^n . Доказать, что существует единственный полином p такой, что $p|_{\mathbb{S}} = f|_{\mathbb{S}}$ и $\Delta p = g$.
3. Обозначим через $P_e(x, \xi) = \frac{|x|^2 - 1}{|x - \xi|}$ внешнее ядро Пуассона для задачи Дирихле во внешности единичного шара евклидова пространства \mathbb{R}^n . Доказать, что формула $P_e[f](x) = \int_{\mathbb{S}} f(\xi) P_e(x, \xi) d\xi$ задает гармоническое продолжение непрерывной на единичной сфере \mathbb{S} функции f на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.3. Описание контрольно-оценочных мероприятий промежуточного контроля по дисциплине модуля

5.3.1. Зачет

Список примерных вопросов

1. Доказать, что при любом фиксированном вещественном γ функция $e^{\gamma x}$ является неотрицательно определенной.
2. Определение матрицы Грамма. Доказать неотрицательную определенность матрицы Грамма.
3. Доказательство положительной определенности ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра), основанное на формуле Лапласа.
4. Пространство однородных многочленов заданной степени. Шаровые многочлены заданной степени. Сферические гармоники заданной степени.

5. Размерность пространства однородных многочленов двух переменных заданной степени. Размерность пространства шаровых многочленов двух переменных заданной степени.
 6. Размерность пространства однородных многочленов трех переменных заданной степени. Размерность пространства шаровых многочленов трех переменных заданной степени.
 7. Определение гармонических функций. Свойства инвариантности.
 8. Свойство среднего значения и принцип максимума для гармонических функций.
 9. Ядро Пуассона для круга (двумерный случай).
 10. Лемма симметрии. Ядро Пуассона для шара (многомерный случай).
 11. Задача Дирихле для шара и ее решение.
 12. Оператор Лапласа в сферической системе координат.
 13. Выражение сферических функций в сферической системе координат. Уравнение Лежандра. Производящая функция и рекуррентное соотношение. Ортогональность сферических функций и функций Лежандра.
 14. Применение сферических функций для решения краевых задач в сферически симметричных областях.
 15. Положительная определенность многочленов Лежандра.
 16. Положительная определенность ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра).
 17. Схема Дельсарта в задаче о контактном числе евклидова пространства.
 18. Схемы Дельсарта – Юдина в задаче минимизации потенциальной энергии системы заданного числа одинаково заряженных частиц на сфере.
- LMS-платформа – не предусмотрена

5.4 Содержание контрольно-оценочных мероприятий по направлениям воспитательной деятельности

Направление воспитательной деятельности	Вид воспитательной деятельности	Технология воспитательной деятельности	Компетенция	Результаты обучения	Контрольно-оценочные мероприятия
Профессиональное воспитание	учебно-исследовательская, научно-исследовательская	Технология формирования уверенности и готовности к самостоятельной успешной профессиональной деятельности	ПК-1	З-1	Зачет