

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**
Теория массового обслуживания

Код модуля
1160713(1)

Модуль
Прикладные методы теории радиоэлектронных
систем и комплексов

Екатеринбург

Оценочные материалы составлены автором(ами):

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Саблина Наталья Григорьевна	без ученой степени, без ученого звания	Старший преподаватель	департамент радиоэлектроники и связи
2	Язовский Александр Афонасьевич	кандидат технических наук, доцент	Доцент	департамент радиоэлектроники и связи

Согласовано:

Управление образовательных программ

Т.Г. Комарова

Авторы:

- **Саблина Наталья Григорьевна**, Старший преподаватель, департамент радиоэлектроники и связи
- **Язовский Александр Афонасьевич**, Доцент, департамент радиоэлектроники и связи

1. СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ Теория массового обслуживания

1.	Объем дисциплины в зачетных единицах	4
2.	Виды аудиторных занятий	Лекции Практические/семинарские занятия Лабораторные занятия
3.	Промежуточная аттестация	Экзамен
4.	Текущая аттестация	Домашняя работа
		2

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ (ИНДИКАТОРЫ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ Теория массового обслуживания

Индикатор – это признак / сигнал/ маркер, который показывает, на каком уровне обучающийся должен освоить результаты обучения и их предъявление должно подтвердить факт освоения предметного содержания данной дисциплины, указанного в табл. 1.3 РПМ-РПД.

Таблица 1

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения (индикаторы)	Контрольно-оценочные средства для оценивания достижения результата обучения по дисциплине
1	2	3
ПК-1 -Способен осуществлять анализ состояния научно-технической проблемы, определять цели и выполнять постановку задач проектирования	З-1 - Определять стадии проектирования П-1 - Иметь практический опыт определения стадий проектирования П-2 - Иметь практический опыт разработки технического задания на проектирование У-1 - Разрабатывать техническое задание на проектирование	Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2 Лабораторные занятия Лекции Практические/семинарские занятия Экзамен
ПК-6 -Способен решать задачи оптимизации существующих и новых технических решений в условиях	З-1 - Описывать методы оптимизации существующих и новых технических решений в условиях априорной неопределенности	Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2 Практические/семинарские занятия Экзамен

<p>априорной неопределенности с применением пакетов прикладных программ</p>	<p>П-1 - Имеет практический опыт оптимизации проектируемых радиоэлектронных систем и комплексов У-1 - Применять современный математический аппарат для решения задачи оптимизации</p>	
<p>ПК-8 -Способен организовывать работу коллектива исполнителей, проводящих проектную, исследовательскую, технологическую и экспериментальную разработку, принимать исполнительские решения, находить оптимальные организационные решения</p>	<p>З-1 - Сформулировать принципы организации работы коллектива исполнителей, проводящих проектную, исследовательскую, технологическую и экспериментальную разработку З-2 - Определять оптимальные организационные и исполнительские решения. П-1 - Иметь практический опыт принятия оптимальных организационных решений П-2 - Иметь практический опыт организационной работы коллектива исполнителей, проводящих проектную, исследовательскую, технологическую и экспериментальную разработку У-1 - Организовывать работу коллектива, исполнителей, проводящих проектную, исследовательскую, технологическую и экспериментальную разработку У-2 - Создавать здоровый климат в коллективе исполнителей, проводящих проектную, исследовательскую, технологическую и экспериментальную разработку</p>	<p>Лабораторные занятия Лекции Экзамен</p>
<p>ПК-11 -Способен осуществлять эксплуатацию и техническое обслуживание радиоэлектронных систем и комплексов</p>	<p>З-1 - Описывать аппаратуру обслуживаемых радиоэлектронных систем и комплексов и её функционирование П-1 - Иметь практический опыт эксплуатации и технического обслуживания радиоэлектронных систем и комплексов</p>	<p>Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2 Лабораторные занятия Практические/семинарские занятия Экзамен</p>

	У-1 - Разрабатывать эксплуатационную документацию радиоэлектронных систем и комплексов У-2 - Осуществлять эксплуатацию и техническое обслуживание радиоэлектронных систем и комплексов	
--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

3. ПРОЦЕДУРЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ В БАЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА БРС)

3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

1. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – 0.3		
Текущая аттестация на лекциях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>Домашняя работа 1</i>	3,17	50
<i>Домашняя работа 2</i>	3,17	50
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – 0.5		
Промежуточная аттестация по лекциям – экзамен		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – 0.5		
2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – 0.3		
Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>Практическое занятие 1</i>	3,8	15
<i>Практическое занятие 2</i>	3,8	15
<i>Практическое занятие 3</i>	3,8	15
<i>Практическое занятие 4</i>	3,8	15
<i>Практическое занятие 5</i>	3,8	20
<i>Практическое занятие 6</i>	3,8	20
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям – 1		
Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям – Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям – не предусмотрено		
3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий – 0.4		

Текущая аттестация на лабораторных занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>Выполнение лабораторной работы 1</i>	3,17	30
<i>Выполнение лабораторной работы 2</i>	3,17	30
<i>Выполнение лабораторной работы 3</i>	3,17	40
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям -1		
Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям –нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		
4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий –не предусмотрено		
Текущая аттестация на онлайн-занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям -не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям –нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – не предусмотрено		

3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта

Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено		
Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено		

4. КРИТЕРИИ И УРОВНИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

4.1. В рамках БРС применяются утвержденные на кафедре/институте критерии (признаки) оценивания достижений студентов по дисциплине модуля (табл. 4) в рамках контрольно-оценочных мероприятий на соответствие указанным в табл.1 результатам обучения (индикаторам).

Таблица 4

Критерии оценивания учебных достижений обучающихся

Результаты обучения	Критерии оценивания учебных достижений, обучающихся на соответствие результатам обучения/индикаторам
Знания	Студент демонстрирует знания и понимание в области изучения на уровне указанных индикаторов и необходимые для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.

Умения	Студент может применять свои знания и понимание в контекстах, представленных в оценочных заданиях, демонстрирует освоение умений на уровне указанных индикаторов и необходимых для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Опыт /владение	Студент демонстрирует опыт в области изучения на уровне указанных индикаторов.
Другие результаты	Студент демонстрирует ответственность в освоении результатов обучения на уровне запланированных индикаторов. Студент способен выносить суждения, делать оценки и формулировать выводы в области изучения. Студент может сообщать преподавателю и коллегам своего уровня собственное понимание и умения в области изучения.

4.2 Для оценивания уровня выполнения критериев (уровня достижений обучающихся при проведении контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля) используется универсальная шкала (табл. 5).

Таблица 5

Шкала оценивания достижения результатов обучения (индикаторов) по уровням

Характеристика уровней достижения результатов обучения (индикаторов)				
№ п/п	Содержание уровня выполнения критерия оценивания результатов обучения (выполненное оценочное задание)	Шкала оценивания		
		Традиционная характеристика уровня		Качественная характеристика уровня
1.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты в полном объеме, замечаний нет	Отлично (80-100 баллов)	Зачтено	Высокий (В)
2.	Результаты обучения (индикаторы) в целом достигнуты, имеются замечания, которые не требуют обязательного устранения	Хорошо (60-79 баллов)		Средний (С)
3.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты не в полной мере, есть замечания	Удовлетворительно (40-59 баллов)		Пороговый (П)
4.	Освоение результатов обучения не соответствует индикаторам, имеются существенные ошибки и замечания, требуется доработка	Неудовлетворительно (менее 40 баллов)	Не зачтено	Недостаточный (Н)
5.	Результат обучения не достигнут, задание не выполнено	Недостаточно свидетельств для оценивания		Нет результата

5. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

5.1. Описание аудиторных контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля

5.1.1. Лекции

Самостоятельное изучение теоретического материала по темам/разделам лекций в соответствии с содержанием дисциплины (п. 1.2. РПД)

5.1.2. Практические/семинарские занятия

Примерный перечень тем

1. Расчёт цепи Маркова
2. Анализ СМО с отказами
3. Анализ СМО с ограничением на длину очереди
4. Анализ СМО с ограничением на время пребывания заявки в очереди
5. Составление и решение уравнений Колмогорова
6. Непрерывно-стохастическое моделирование

Примерные задания

Пример № 2. Анализ СМО с отказами

Автоматическая телефонная станция имеет 5 линий связи. Средняя плотность потока вызовов $\lambda = 3 \frac{\text{выз.}}{\text{мин}}$, средняя продолжительность разговоров $\bar{t}_{\text{одс}} = 1$ мин. Поток заявок на разговор от абонентов является простейшим. Продолжительность каждого разговора случайна, и она не зависит от продолжительности разговоров других абонентов, поэтому можно утверждать, что и поток обслуживания является простейшим, а продолжительность разговоров абонентов распределена по показательному закону. Требуется оценить работу станции как с точки зрения потребителя, так и с точки зрения эффективности ее эксплуатации.

Решение:

1. Параметры системы

Интенсивность входного потока: $\lambda = 3 \frac{\text{выз.}}{\text{мин}}$

Среднее время обслуживания и интенсивность потока обслуживания:

$$\bar{t}_{\text{одс}} = 1 \text{ мин}, \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{одс}}} = 1 \frac{\text{выз.}}{\text{мин}}$$

Таким образом, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 3$.

2. Расчет финальных вероятностей

Для расчета финальных вероятностей чистой СМО с отказами необходимо воспользоваться формулами Эрланга:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \right]^{-1}, p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \quad 0 \leq k \leq n$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} \right]^{-1} = [18,4]^{-1} = 0,054$$

$$p_1 = \frac{3^1}{1!} \cdot 0,054 = 0,162$$

$$p_2 = \frac{3^2}{2!} \cdot 0,054 = 0,243$$

$$p_3 = \frac{3^3}{3!} \cdot 0,054 = 0,243$$

$$p_4 = \frac{3^4}{4!} \cdot 0,054 = 0,18225$$

$$p_5 = p_n = \frac{3^5}{5!} \cdot 0,054 = 0,10935$$

Условие нормировки выполняется: $\sum_{i=0}^5 p_n = 1$

3. Эффективность АТС с точки зрения потребителя

- 1) Если система находится в состоянии x_n , то очередная заявка, поступившая в систему, получит отказ в обслуживании и вероятность отказа будет равна:

$$P_{\text{отк}} = p_n = 0,10935 \approx 0,109$$

- 2) Вероятность того, что заявка, поступившая в систему, найдет хотя бы один канал свободным и будет обслужена:

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0,89065 \approx 0,891$$

- 3) Среднее время пребывания заявки в системе (среднее время разговора, если он состоится):

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{P_{\text{обс}}}{\mu} = 0,891 \text{ мин}$$

4. Эффективность АТС с точки зрения эффективности ее эксплуатации

- 1) Абсолютная пропускная способность системы (среднее число обслуженных заявок в единицу времени):

$$\lambda_b = \lambda \cdot P_{\text{обс}} = 2,673 \frac{\text{заявок}}{\text{мин}}$$

- 2) Среднее число занятых каналов:

$$\bar{n}_3 = a \cdot P_{\text{обс}} = 2,673$$

3) Процент загрузки системы:

$$k_z = \frac{n_i}{n} \cdot 100\% = 53,5\%$$

5. Анализ полученных результатов

Исходя из рассчитанных показателей можно сделать вывод, что АТС с заданными параметрами высокоэффективна с точки зрения потребителя – шанс получить отказ в обслуживании довольно мал, однако с точки зрения эксплуатационных свойств АТС требует улучшений – несмотря на то, что большинство поступивших заявок будет обслужено, система загружена лишь на 53,5%, что означает простой как минимум двух линий связи.

Пример № 3. Анализ СМО с ограничением на длину очереди

Продуктовый магазин посещают в среднем 30 человек в час. Имеются два кассира обслуживают в среднем одного клиента в минуту. Очередь к кассиру ограничена 3 клиентами. Найти основные показатели эффективности данной системы.

Решение:

1. Параметры системы

Интенсивность входного потока: $\lambda = 30 \frac{\text{клиентов}}{\text{час}} = 0,5 \frac{\text{клиентов}}{\text{мин}}$

Интенсивность потока обслуживания и среднее время обслуживания:

$$\bar{t}_{\text{обс}} = 1 \text{ мин}, \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}} = 1 \frac{\text{клиентов}}{\text{мин}}$$

Максимальное количество мест в очереди: $m = 3$

Таким образом, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 0,5$.

2. Финальные вероятности

Для расчета финальных вероятностей СМО с ограничениями на длину очереди необходимо воспользоваться следующими формулами:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^m \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^m}{m!} \sum_{n=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^n \right]^{-1}, P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0, P_{n+m} = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^m P_n$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^3 \frac{\alpha^n}{n!} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{0,5}{1!} + \frac{0,5^2}{2!} + \frac{0,5^3}{3!} \right]^{-1} = \left[\left(\frac{0,5}{2}\right)^1 + \left(\frac{0,5}{2}\right)^2 + \left(\frac{0,5}{2}\right)^3 \right]^{-1} = 0,6$$

$$P_1 = \frac{0,5^1}{1!} \cdot 0,6 = 0,3$$

$$P_n = P_2 = \frac{0,5^2}{2!} \cdot 0,6 = 0,075$$

$$P_{n+1} = P_{2+1} = \left(\frac{0,5}{2}\right)^1 \cdot 0,075 = 0,019$$

$$P_{n+2} = P_{2+2} = \left(\frac{0,5}{2}\right)^2 \cdot 0,075 = 0,005$$

$$p_{n+m} = p_{2+3} = \left(\frac{0,5}{2}\right)^3 \cdot 0,075 = 0,001$$

Условие нормировки выполняется: $\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1$.

3. Показатели эффективности системы

1) Если система находится в состоянии x_{n+m} то очередной клиент, пришедший в магазин, не станет дожидаться обслуживания, и вероятность отказа будет равна:

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = p_{2+3} = 0,001$$

2) Вероятность того, что клиент будет обслужен:

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}} = 0,999$$

3) Абсолютная пропускная способность магазина (интенсивность потока обслуженных клиентов):

$$\lambda_b = \lambda \cdot P_{\text{обс}} = 0,4995 \approx 0,5 \frac{\text{клиентов}}{\text{мин}}$$

4) Среднее число кассиров, занятых обслуживанием клиентов:

$$\bar{n}_3 = \alpha \cdot P_{\text{обс}} = 0,5 \text{ кассиров}$$

5) Среднее число незанятых кассиров:

$$\bar{n}_{\text{св}} = n - \bar{n}_3 = 1,5 \text{ кассира}$$

6) Среднее число клиентов, ожидающих обслуживания:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= p_n \cdot \sum_{m=1}^n m \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m = 0,075 \cdot \left(\frac{0,5}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{0,5}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{0,5}{2}\right)^3 = \\ &= 0,032 \frac{\text{клиентов}}{\text{мин}} \end{aligned}$$

7) Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{0,032}{0,5} = 0,064 \text{ мин}$$

8) Среднее число клиентов в магазине:

$$\bar{l} = \bar{n}_3 + \bar{r} = 1,432 \text{ клиентов}$$

9) Среднее время пребывания клиентов в магазине (в очереди и на обслуживании):

$$\bar{t}_{\text{сред}} = \frac{\bar{i}}{\lambda} = \frac{1432}{0,5} = 2,864 \text{ мин}$$

Пример № 4. Анализ СМО с ограничением на время пребывания заявки в очереди

На овощную базу поступают овощи, где они подлежат предварительной обработке перед длительным хранением. До обработки овощи хранятся под открытым небом и после транспортировки могут храниться без потери качества не больше суток. На базу овощи поступают неравномерно, поэтому в первом приближении можно считать поступающий поток овощей пуассоновским. В среднем на базу в течение декады прибывает до 25 машин овощей двухтонной грузоподъемности. На базе работают две бригады по предварительной обработке овощей, каждая бригада способна за сутки переработать до трех тонн овощей. Требуется найти основные показатели эффективности данной СМО, а также при заданном числе бригад дать экономическую оценку работы базы по предварительной обработке овощей. Содержание одной бригады в месяц обходится в 20 тыс. руб., а стоимость каждой тонны овощей 6 тыс. руб.

Решение:

1. Параметры системы

Интенсивность входного потока: $\lambda = 25 \cdot 2 \frac{1}{\text{дек}} = 5 \frac{1}{\text{сутки}}$

Интенсивность потока обслуживания и среднее время обслуживания:

$$\mu = 3 \frac{1}{\text{сутки}} \quad \bar{t}_{обс} = \frac{1}{\mu} = 0,33 \text{ суток}$$

Стоимость содержания каждой бригады:

$$q_k = 20 \frac{\text{тыс.руб}}{\text{месяц}} = 0,67 \frac{\text{тыс.руб}}{\text{сутки}}$$

Стоимость тонны овощей: $q_{ов} = 6 \text{ тыс. руб.}$

Среднее время ожидания обслуживания и интенсивность выброса овощей: $\bar{t}_{ож} = 1 \text{ сутки}$, $\nu = \frac{1}{\bar{t}_{ож}} = 1 \frac{1}{\text{сутки}}$

Таким образом, $\alpha = \lambda \cdot \bar{t}_{одс} = 5 \cdot 0,33 = 1,65$, $\beta = \nu \cdot \bar{t}_{одс} = 0,33$.

2. Финальные вероятности

В табл. 1 приведены значения составляющих z_s бесконечной суммы и значения финальных вероятностей p_{n+s} , вычисленных по формулам в зависимости от числа s (s – количество овец в тоннах, «ожидающих» обработки):

$$z_0 = 1, z_s = z_{s-1} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)}, p_{n+s} = p_n \cdot z_s$$

Значения z_s вычисляются до тех пор, пока очередная составляющая не станет меньше 0,001.

Таблица 1

s	z_s	p_{n+s}
1	0,708	0,156
2	0,439	0,097
3	0,242	0,053
4	0,12	0,027
5	0,054	0,012
6	0,023	0,005
7	0,009	0,002
8	0,003	0,0007
9	0,001	0,0002
Σ	1,6	0,353

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} z_s \right]^{-1} = \left[1 + 1,65 + \frac{1,65^2}{2} + \frac{1,65^3}{2} \cdot 1,6 \right]^{-1} = 0,162$$

$$p_1 = \alpha \cdot p_0 = 0,267$$

$$p_n = p_2 = \frac{\alpha^n}{2!}, p_0 = 0,221$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 0,65$$

Таким образом, сумма всех финальных вероятностей:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \cong 0,65 + 0,353 = 1,003, \text{ т. е. условие нормировки выполняется.}$$

3. Показатели эффективности системы

- 1) Среднее число простаивающих бригад:

$$\bar{n}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = 2 \cdot 0,162 + 1 \cdot 0,267 = 0,591$$

- 2) Среднее число бригад, занятых обработкой овощей:

$$\bar{n}_1 = n - \bar{n}_0 = 2 - 0,591 = 1,409$$

- 3) Коэффициент загрузки бригад:

$$k_3 = \frac{\bar{n}_1}{n} = \frac{1,409}{2} = 0,705$$

- 4) Вероятность того, что привезенные овощи будут обработаны:

$$P_{обс} = \frac{\bar{n}_1}{\alpha} = \frac{1,409}{1,65} = 0,854$$

- 5) Вероятность того, что поступившие овощи не будут своевременно обработаны и должны быть выбракованы:

$$P_{отк} = 1 - P_{обс} = 1 - 0,854 = 0,146$$

- 6) Количество обработанных за сутки овощей:

$$\lambda_b = \lambda \cdot P_{обс} = 5 \cdot 0,854 = 4,27 \frac{\text{тонн}}{\text{сутки}}$$

4. Экономическая оценка работы базы

В качестве критерия такой оценки принимается стоимость предварительной обработки одной тонны овощей:

$$C = \frac{1}{\lambda_b} (C_1 + C_2)$$

Указанная стоимость зависит от:

- 1) Затрат на содержание l бригад в сутки:

$$C_1 = q_k \cdot n = 0,67 \cdot 2 = 1,34 \frac{\text{тыс. руб.}}{\text{сутки}}$$

- 2) Стоимости выбракованных за сутки овощей:

$$C_2 = q_{отк} \cdot \lambda \cdot P_{отк} = 6 \cdot 5 \cdot 0,146 = 4,38 \frac{\text{тыс. руб.}}{\text{сутки}}$$

Таким образом, стоимость предварительной обработки одной тонны
овощей:

$$C = \frac{1}{4,27} \cdot (1,34 + 4,38) = 1,34 \text{ тыс. руб.}$$

Пример № 1. Расчет цепи Маркова

Случайный процесс функционирования системы может быть представлен в виде работы лампы-индикатора производственного процесса. Задан граф состояний рассматриваемой системы (рис. 1):

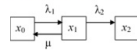


Рис. 1 Граф состояний к задаче № 1

Имеется три состояния системы:

x_0 – лампочка выключена (система простаивает),

x_1 – лампочка включена (работает),

x_2 – перегрела.

Все потоки событий – простейшие. Их значения: $\lambda_1 = 4$ 1/мин, $\mu = 3$ 1/мин, $\lambda_2 = 1$ 1/мин. Требуется: рассчитать переходные вероятности, изобразить размеченный граф состояний, составить матрицу переходных вероятностей и провести расчет цепи Маркова (3-5 шагов).

Решение:

Шаг дискретизации примем равным $\Delta t = 0,1$ мин для того, чтобы значения переходных вероятностей не превышали единицу. Сформируем размеченный граф состояний для цепи Маркова, в котором вместо интенсивностей потоков фигурируют переходные вероятности (рис. 2) – элементы матрицы переходных вероятностей P.



Рис. 2 Размеченный граф состояний для цепи Маркова
Переходные вероятности рассчитаем следующим образом:

$$p_{01} = \lambda_1 \cdot \Delta t = 4 \cdot 0,1 = 0,4$$

$$p_{10} = \mu \cdot \Delta t = 3 \cdot 0,1 = 0,3$$

$$p_{12} = \lambda_2 \cdot \Delta t = 1 \cdot 0,1 = 0,1$$

Значения p_{00} , p_{11} , p_{22} на главной диагонали определяются из условия, что сумма переходных вероятностей в любой строке матрицы переходных вероятностей P должна равняться единице. Таким образом, стохастическая матрица P переходных вероятностей будет иметь вид:

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть в начальный момент система находилась в состоянии x_0 , следовательно, при $k = 0$ вектор вероятностей будет иметь вид $r(0) = (1 \ 0 \ 0)$.

Демонстрация пяти шагов цепи Маркова:

$k = 1$:

$$(1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,6 \ 0,4 \ 0)$$

$k = 2$:

$$(0,6 \ 0,4 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,48 \ 0,48 \ 0,04)$$

$k = 3$:

$$(0,48 \ 0,48 \ 0,04) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,432 \ 0,48 \ 0,088)$$

$k = 4$:

$$(0,432 \ 0,48 \ 0,088) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,403 \ 0,461 \ 0,136)$$

$k = 5$:

$$(0,403 \ 0,461 \ 0,136) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,38 \ 0,438 \ 0,182)$$

Пример №6 Непрерывно-стохастическое моделирование

Представляется система с ограничением на время пребывания заявки в очереди. Каналы обслуживания разной производительности. Неупорядоченное расположение каналов (в этой системе заявка, заставшая свободными оба канала обслуживания, выбирает тот канал, который раньше закончил обслуживание предыдущей заявки). Первая пришедшая в систему заявка поступает на обслуживание первым каналом, вторая – вторым.

Если к моменту поступления заявки все каналы заняты, то эта заявка становится в очередь. Время ожидания в очереди ограничено случайной величиной $T_{ож}$. Если по истечении этого срока заявка не поступила на обслуживание, то она покидает систему необслуженной. Если в очереди уже находятся две заявки, то вновь поступившая заявка уходит из системы необслуженной. Это дополнительное ограничение на число заявок в очереди ($m = 2$) вводится для того, чтобы упростить выполнение предложенного задания. Оно допустимо, если достаточно невелики вероятности пребывания в очереди последних заявок, полученных по результатам проведенных расчетов.

Для рассматриваемого примера заданы следующие параметры:

$$n = 2, \lambda = 3 \text{ 1/мин}, \mu_1 = 3 \text{ 1/мин}, \mu_2 = 2 \text{ 1/мин}, \bar{t}_{ож} = 0,25 \text{ мин.}$$

1. Формирование статистического материала

Процессы функционирования СМО случайные. Это прежде всего связано с тем, что случайны потоки событий, протекающих в системе. Для моделирования этих процессов необходимо использовать статистический материал, содержащий характеристики случайных функций времени, описывающих рассматриваемые потоки:

1. Входной поток $\rightarrow T, \bar{T}, \lambda$ – случайный интервал между моментами времени поступления в систему двух соседних заявок, его статистическое среднее (математическое ожидание), интенсивность простейшего потока (среднее число заявок в единицу времени – мин).

2. Потоки обслуживания $\rightarrow T_{обс,k}, \bar{T}_{обс,k}, \mu_k, k=1,2$ – случайные величины, определяющие время обслуживания заявки каждым из двух каналов, их статистические средние и интенсивности простейших потоков ухода заявки из-под обслуживания.

3. Поток ухода заявки из очереди (для системы с ограничением времени пребывания в очереди) $\rightarrow T_{ок}, \bar{T}_{ок}, \nu$ – случайный интервал времени ожидания обслуживания заявкой в очереди, ее математическое ожидание и интенсивность потока ухода заявки из очереди.

Поскольку рассматриваемые случайны величины $T, T_{обс,k}, k=1,2$ и $T_{ок}$ подчинены **показательному** закону распределения вероятностей и их математические ожидания (средние значения) $\bar{T}, \bar{T}_{обс,k}, k=1,2, \bar{T}_{ок}$ равны:

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda}; \bar{T}_{обс,k} = \frac{1}{\mu_k}, k=1,2, \bar{T}_{ок} = \frac{1}{\nu} \text{ где } \lambda, \mu_1, \mu_2, \nu.$$

Интенсивности соответствующих потоков и являются одновременно параметрами показательного распределения, и, кроме того, для этого распределения характерно **равенство** математических ожиданий и среднеквадратических отклонений.

Таким образом, статистический материал, для рассматриваемого примера должен содержать четыре массива данных.

1. Массив выборочных значений случайных интервалов между моментами времени поступления в систему двух соседних заявок T_j . Заданная интенсивность модулированного входного потока $\lambda = 3$ 1/мин. Его теоретическое математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение $-\bar{T} = \sigma = 0,333$ мин. Выборочные математическое ожидание $-\bar{T}^{выб} = 0,29$ мин, среднеквадратическое отклонение $-\sigma^{выб} = 0,29$ мин.

2. Массив выборочных случайных значений времени обслуживания заявки первым каналом $T_{обс,1}$. Заданная интенсивность $\mu_1 = 3$ 1/мин, его теоретическое математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение

– $\bar{t}_{обс,1} = \sigma_{обс,1} = \frac{1}{\mu_1} = 0,33$ мин. Выборочные математическое ожидание – $\bar{t}_{обс,1}^{выб} = 0,31$ мин, среднеквадратическое отклонение – $\bar{\sigma}_{обс,1}^{выб} = 0,29$ мин.

3. Массив выборочных случайных значений времени обслуживания заявки вторым каналом $T_{обс,2}$. Заданная интенсивность $\mu_2 = 2$ 1/мин, его теоретическое математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение – $\bar{t}_{обс,2} = \sigma_{обс,2} = \frac{1}{\mu_2} = 0,50$ мин. Выборочные математическое ожидание – $\bar{t}_{обс,2}^{выб} = 0,48$ мин, среднеквадратическое отклонение – $\bar{\sigma}_{обс,2}^{выб} = 0,29$ мин.

4. Массив выборочных случайных значений времени пребывания заявки в очереди $T_{ож}$. Заданная интенсивность $\nu = 4$ 1/мин, его теоретическое математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение – $\bar{t}_{ож} = \sigma_{ож} = \frac{1}{\nu} = 0,25$ мин. Выборочные математическое ожидание – $\bar{t}_{ож}^{выб} = 0,48$ мин, среднеквадратическое отклонение – $\bar{\sigma}_{ож}^{выб} = 0,29$ мин.

Статистический материал, разработанный для рассмотренного примера, представлен в таблице 1.

Массивы выборочных значений

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T_{ож}$ $\bar{T} = 0,25$		0,20	0,05	0,38	0,18	0,13	0,46	0,29	0,25	0,66	$\bar{t}_{ож}^{выб} = 0,29$ $\bar{\sigma}_{ож}^{выб} = 0,29$
$T_{обс,1}^d$ $\bar{t}_{обс,1} = 0,33$	0,27	0,39	0,36	0,16	0,06	0,57	0,30	0,26	0,34	0,42	$\bar{t}_{обс,1}^{выб} = 0,31$ $\bar{\sigma}_{обс,1}^{выб} = 0,29$
$T_{обс,2}^d$ $\bar{t}_{обс,2} = 0,50$	0,33	0,64	0,29	0,48	0,25	0,82	0,89	0,19	0,11	0,76	$\bar{t}_{обс,2}^{выб} = 0,48$ $\bar{\sigma}_{обс,2}^{выб} = 0,29$

$T_{\text{ож}}^i$	0,30	0,17	0,06	0,47	0,09	0,45	0,06	0,17	0,27	0,31	$\bar{T}_{\text{ож}}^{\text{теор}}=0,29$
$\bar{T}_{\text{ож}}=0,25$											$\sigma_{\text{ож}}^{\text{теор}}=0,29$

2. Статистический материал для графической иллюстрации

Алгоритм графического представления изучаемого случайного процесса демонстрируется в ходе выполнения предлагаемого примера.

Требуется изучить процесс функционирования системы и определить необходимый набор показателей, характеризующих ее эффективность.

Чтобы наглядно представить **случайный процесс функционирования** изучаемых систем во времени, удобно применять графические методы. Они позволяют наглядно изобразить последовательность событий, отобразить правила, по которым эти события протекают, глубже изучить свойства системы. Графическая иллюстрация процесса функционирования СМО, проведенная даже на небольшом отрезке времени, позволяет с некоторой точностью **оценить показатели ее эффективности**.

Необходимый для этого **статистический материал** состоит из массивов выборочных значений, представленных в табл. 1 и на этой основе оформляется материал в виде новых таблиц (см. табл. 2 и табл. 3).

Простейший входной поток заявок.

Таблица 2 содержит данные, характеризующие входной поток событий. В ее первой строке – номера заявок i , поступающие в систему.

Во второй строке табл. 2 помещен взятый из табл. 1 массив выборочных значений случайных **интервалов T_i** между $(i - 1)$ -ой и i -ой заявками.

В третьей строке табл. 2 приведены значения моментов времени прихода заявок в систему $t_i = t_{i-1} + T_i$, $i = 1, 2, \dots, 9$, $T_0 = 0$ (изучаемый процесс начинается с момента времени прихода в систему нулевой заявки)

Таблица 2

Простейший поток		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda = 3 \text{ 1/мин.}$	i										
	T_i	0,20	0,05	0,38	0,18	0,13	0,46	0,29	0,25	0,66	
$\bar{T} = 0,33 \text{ мин.}$	i_i	0,00	0,20	0,25	0,63	0,81	0,94	1,40	1,69	1,94	2,60

Потоки обслуживания и поток ухода заявки из очереди.

Статистическая информация об этих потоках формируется в ходе проведения анализа системы.

В первом столбце табл. 3 показаны интенсивности потоков обслуживания: $\mu_1 = 3 \text{ 1/мин.}$, $\mu_2 = 2 \text{ 1/мин.}$, интенсивность потока ухода заявок из очереди $\nu = 4 \text{ 1/мин.}$

Элементы выборочных массивов случайных интервалов $T_{обс,1}^i, T_{обс,2}^i$ переносятся из табл. 1 в соответствующие строки табл. 3 (первую, третью и пятую). Во второй, четвертой и шестой строках уже в процессе описания алгоритма помещаются номера i заявок, показывающих, что именно данный случайный элемент выборки, расположенный выше в предыдущей строке, использовался при демонстрации алгоритма моделировании процесса для указанной i -ой заявки.

Потоки обслуживания и поток ухода заявки из очереди Таблица 3

$\mu_1 = 3 \text{ 1/мин.}$	$T_{обс,1}^i$	0,27	0,39	0,36	0,16	0,06	0,57	0,30	0,26	0,34	0,42
	i	0	2	4	5	6	8				
$\mu_2 = 2 \text{ 1/мин.}$	$T_{обс,2}^i$	0,33	0,64	0,29	0,48	0,25	0,82	0,89	0,19	0,11	0,76
	i	1	3	7	9						
$\nu = 4 \text{ 1/мин.}$	$T_{ож}^i$	0,30	0,17	0,06	0,47	0,09	0,45	0,06	0,17	0,27	0,31
	i	2	5								

3. Алгоритм графической иллюстрации.

Графическое изображение случайного процесса функционирования системы рассматриваемого примера студентами представляется в масштабе на **обычной бумаге в клеточку**. Масштаб нужно выбирать таким, чтобы можно было продемонстрировать процесс обслуживания около десяти входных заявок и обсудить полученные результаты.

Описание алгоритма:

Динамика случайного процесса зависит от дисциплины обслуживания для рассматриваемой системы. Существуют два варианта дисциплин обслуживания:

- Система с **неупорядоченным** расположением каналов обслуживания. Реализуется правило: заявка занимает тот канал, который **раньше закончила обслуживание** предыдущей заявки. Первая поступившая в систему заявка поступает на обслуживание первым каналом, вторая – обязательно поступает на обслуживание вторым каналом независимо от того, когда закончилось обслуживание первой заявки. На каждом шаге итерационного процесса фиксируются: номер i заявки и время t_i ее прихода в систему.

- Система с **последовательным** (упорядоченным) расположением каналов обслуживания. Заявка, заставшая свободными оба канала обслуживания, обязательно выбирает первый канал. Второй канал выбирается на обслуживание только тогда, когда занят первый канал.

1. В рассматриваемом примере изучается система с неупорядоченным расположением каналов. **Формируется цикл**. На каждом шаге итерационного процесса фиксируются: номер i заявки и время t_i ее прихода в систему.

2. Для **первых двух** заявок вычисляются: значения моментов времени начала и окончания обслуживания заявки:

$$t_{\text{нач},1}^0 = t_0 = 0; t_{\text{кон},1}^0 = t_{\text{нач},1}^0 + T_{\text{обс},1}^0; t_{\text{нач},2}^1 = t_1; t_{\text{кон},2}^1 = t_{\text{нач},2}^1 + T_{\text{обс},2}^1.$$

Значения $T_{обс,1}^i$ и $T_{обс,2}^i$, $i = 1, 2$, для каждой заявки выбираются из табл.

3. Фиксируется результат обслуживания этих заявок.

3. Для остальных заявок: ($i > 1$) выполняются следующие действия:

Фиксируются: номер i и время прихода заявки в систему t_i .

Сравниваются значения моментов времени $t_{кон,1}$ и $t_{кон,2}$, когда заканчивается обслуживание предыдущих заявок на первом и втором каналах **непосредственно перед** поступлением i -ой заявки. Выбирается канал, на котором будет обслуживаться i -я заявка. Заявка обслуживается на том канале, который **раньше** освободился.

$$t_{кон,1} < t_{кон,2} \rightarrow \begin{cases} t_i > t_{кон,1} \rightarrow \text{заявка занимает первый канал} \\ t_i < t_{кон,1} \rightarrow \text{заявка остается в накопителе} \end{cases}$$
$$t_{кон,1} > t_{кон,2} \rightarrow \begin{cases} t_i > t_{кон,2} \rightarrow \text{заявка занимает второй канал} \\ t_i < t_{кон,2} \rightarrow \text{заявка остается в накопителе} \end{cases}$$

Кроме того, определяется, не находилась ли в накопителе i -я заявка до окончания обслуживания предыдущей заявки **на выбранном** канале? Для этого вычисляется предполагаемое значение **времени ожидания** i -й заявки:

$t_{ож}^i = t_{кон,1} - t_i$ (был выбран 1-й канал). $t_{кон,1}$ – это время окончания обслуживания заявкой, пришедшей непосредственно перед i -й заявкой).

Если $t_{ож}^i < 0$, следовательно, в накопителе заявки **не было**, если $t_{ож}^i > 0$, значит, в накопителе **была** заявка.

Если $t_{ож}^2 < T_{ож}^i$, то i -я заявка обслуживается, начиная с момента времени освобождения выбранного канала (значение $T_{ож}^i$ определяется из табл.3).

Если $t_{ож}^2 > T_{ож}^i$, то она уходит из системы необслуженной из-за превышения предназначенного ей времени пребывания в накопителе (очереди).

4. Фиксируется результат функционирования системы на каждом шаге итерационного процесса.

Приближенная оценка эффективности СМО

Как уже отмечалось, эффективность СМО хотя бы приближенно, можно оценить, используя полученное графическое изображение случайного процесса функционирования системы. Определяются некоторые показатели эффективности системы:

1. Число заявок, закончивших обслуживание и получивших отказ в обслуживании на реализованном интервале функционирования системы.
2. Среднее время занятости каналов обслуживания.
3. Коэффициенты загрузки и простоя каналов обслуживания.
4. Среднее время пребывания заявок в системе.

4. Описание алгоритма графической иллюстрации

Таблица 4	
$i = 0,$ $t_0 = 0$	$t_{нач,1}^0 = t_0 = 0; t_{кон,1}^0 = t_{нач,1}^0 + T_{обс,1}^0 = 0 + 0,27 = 0,27.$ Конец обслуживания 1-м каналом 0-й заявки. $t_{кон,1}^0 = 0,27$ мин.
$i = 1,$ $t_1 = 0,20$ мин.	$t_{нач,2}^1 = t_1 = 0,20; t_{кон,2}^1 = t_{нач,2}^1 + T_{обс,2}^1 = 0,20 + 0,33 = 0,53.$ Конец обслуживания 2-м каналом 1-й заявки. $t_{кон,2}^1 = 0,53$ мин.
$i = 2,$ $t_2 = 0,25$ мин.	$t_{кон,1}^0 < t_{кон,2}^1 (0,27 < 0,53)$ —обслуживание на 1-м канале. $t_{ож,1}^2 = t_{кон,1}^0 - t_2 = 0,27 - 0,25 = 0,02 > 0. t_{ож,1}^2 < T_{ож}^2 (0,02 < 0,30).$ $t_{нач,1}^2 = t_{ож,1}^2 + t_2 = 0,02 + 0,25 = 0,27.$ $t_{кон,1}^2 = t_{нач,1}^2 + T_{обс,1}^2 = 0,27 + 0,39 = 0,66.$ Конец обслуживания 1-м каналом 2-й заявки. $t_{кон,1}^2 = 0,66$ мин. 2-я заявка находилась в режиме ожидания $t_{ож,1}^2 = 0,02$ мин.
$i = 3,$ $t_3 = 0,63$ мин.	$t_{кон,1}^2 > t_{кон,2}^1 (0,66 > 0,53)$ —обслуживание на 2-м канале. $t_{ож,2}^3 = t_{кон,2}^1 - t_3 = 0,53 - 0,63 = -0,10 \rightarrow t_{ож,2}^3 = 0.$ Простой 0,10. $t_{нач,2}^3 = t_{ож,2}^3 + t_3 = -0,10 + 0,63 = 0,53. t_{кон,2}^3 = t_{нач,2}^3 + T_{обс,2}^3 = 0,53 + 0,64 = 1,17.$

	<p>Конец обслуживания 2-м каналом 3-й заявки. $t_{\text{кон},2}^3 = 1,27$ мин. $t_{\text{ож},2}^3 = 0$. Простой 2-го канала = 0,10 мин.</p>
<p>$i = 4,$ $t_4 = 0,81$ мин.</p>	<p>$t_{\text{кон},1}^4 < t_{\text{кон},2}^3 (0,66 < 1,27)$ → обслуживание на 1-м канале. $t_{\text{ож},1}^4 = t_{\text{кон},1}^2 - t_4 = 0,66 - 0,81 = -0,15 < 0$ → $t_{\text{ож},1}^4 = 0$. Простой 0,15. $t_{\text{нар},1}^4 = t_{\text{ож},1}^4 + t_4 = 0,81$. $t_{\text{кон},1}^4 = t_{\text{нар},1}^4 + T_{\text{обс},1}^4 = 0,81 + 0,36 = 1,17$.</p> <p>Конец обслуживания 1-м каналом 4-й заявки. $t_{\text{кон},1}^4 = 1,17$ мин. $t_{\text{ож},1}^4 = 0$. Простой 1-го канала = 0,15 мин.</p>
<p>$i = 5,$ $t_5 = 0,94$ мин.</p>	<p>$t_{\text{кон},1}^5 < t_{\text{кон},2}^4 (1,17 < 1,27)$ → обслуживание на 1-м канале. $t_{\text{ож},2}^5 = t_{\text{кон},1}^4 - t_5 = 1,17 - 0,94 = 0,23 > 0$.</p> <p>Предполагаемое время ожидания $t_{\text{ож},2}^5 = 0,23$ мин, действительное время ожидания $T_{\text{ож},2}^5 = 0,17$ мин. $t_{\text{ож},2}^5 > T_{\text{ож},2}^5$ (0,23 > 0,17). Время ухода из системы при $t = t_5 + T_{\text{ож},2}^5 = 0,94 + 0,17 = 1,11$.</p> <p>5-я заявка уходит из системы необслуженной из-за превышения ее времени пребывания в очереди. $t = 1,11$ мин.</p>
<p>$i = 6,$ $t_6 =$ 1,40 мин.</p>	<p>$t_{\text{кон},1}^6 < t_{\text{кон},2}^5 (1,17 < 1,27)$ → обслуживание на 1-м канале. $t_{\text{ож},1}^6 = t_{\text{кон},1}^4 - t_6 = 1,17 - 1,40 = -0,23 < 0$ → $t_{\text{ож},1}^6 = 0$. Простой 0,23. $t_{\text{нар},1}^6 = t_{\text{ож},1}^6 + t_6 = 1,40$. $t_{\text{кон},1}^6 = t_{\text{нар},1}^6 + T_{\text{обс},1}^6 = 1,40 + 0,06 = 1,46$.</p> <p>Конец обслуживания 1-м каналом 6-й заявки. $t_{\text{кон},1}^6 = 1,46$ мин. $t_{\text{ож},1}^6 = 0$. Простой 1-го канала = 0,23 мин.</p>
<p>$i = 7,$ $t_7 = 1,69$ мин.</p>	<p>$t_{\text{кон},1}^7 > t_{\text{кон},2}^6 (1,46 > 1,27)$ → обслуживание на 2-м канале. $t_{\text{ож},2}^7 = t_{\text{кон},2}^6 - t_7 = 1,27 - 1,69 = -0,42 < 0$ → $t_{\text{ож},2}^7 = 0$. Простой 0,42. $t_{\text{нар},2}^7 = t_{\text{ож},2}^7 + t_7 = 1,69$. $t_{\text{кон},2}^7 = t_{\text{нар},2}^7 + T_{\text{обс},2}^7 = 1,69 + 0,29 = 1,98$</p> <p>Конец обслуживания 2-м каналом 7-й заявки. $t_{\text{кон},2}^7 = 1,98$ мин. $t_{\text{ож},2}^7 = 0$. Простой 2-го канала = 0,42 мин.</p>
<p>$i = 8,$</p>	<p>$t_{\text{кон},1}^8 < t_{\text{кон},2}^7 (1,46 < 1,98)$ → обслуживание на 1-м канале.</p>

$t_1 = 1,94$ мин.	$t_{ож,1}^8 = t_{кон,1}^7 - t_1 = 1,46 - 1,94 = -0,48 < 0 \rightarrow t_{ож,1}^8 = 0$. Простой 0,48. $t_{нач,1}^8 = t_{ож,1}^8 + t_1 = 1,94$. $t_{кон,1}^8 = t_{нач,1}^8 + t_{обс,1}^8 = 1,494 + 0,82 = 2,86$. Конец обслуживания 1-м каналом 8-й заявки. $t_{кон,1}^8 = 2,86$ мин. $t_{ож}^6 = 0$. Простой 1-го канала = 0,48 мин.
$t_2 = 2,40$ мин.	$t_{кон,1}^8 > t_{кон,2}^7 (2,66 > 1,98)$ — обслуживание на 2-м канале. $t_{ож,2}^7 = t_{кон,2}^7 - t_2 = 1,98 - 2,60 = -0,62 < 0 \rightarrow t_{ож,2}^7 = 0$. Простой 0,62. $t_{нач,2}^9 = t_{ож,2}^7 + t_2 = 2,60$. $t_{кон,2}^9 = t_{нач,2}^9 + t_{обс,2}^9 = 2,60 + 0,48 = 3,08$. Конец обслуживания 2-м каналом 7-й заявки. $t_{кон,1}^7 = 3,08$ мин. $t_{ож}^7 = 0$. Простой 2-го канала = 0,62 мин.

Исследован характер обслуживания десяти входных заявок. Приведенный ниже рис. 1 содержит графическую иллюстрацию процесса обслуживания только **восьми** из этих заявок.

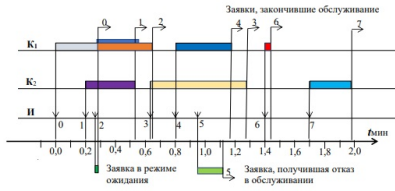


Рис. 1. Графическая иллюстрация случайного процесса функционирования СМО

5. Эффективность СМО рассматриваемого примера

1. На почти двухминутном интервале времени, $t \in (0, \dots, 1,98)$, в систему поступило 8 заявок. Из них 7 заявок были обслужены, а одна заявка ушла из системы не обслуженной; $P_{\text{обс}} = 0,875$, $P_{\text{отк}} = 0,125$.

2. **Первый** канал был занят обслуживанием **1,12 мин** (с учетом 0,04 мин, когда на этом интервале он успел обслужить 8-ю заявку до 1,98 мин, но, не учитывая 0,16 мин, которые 1 канал не мог обслуживать 5-ю заявку). Канал простаивал **0,86 мин**. **Второй** канал был занят обслуживанием **1,26 мин**, простаивал – 0,72 мин.

3. Таким образом, коэффициент загрузки первого канала равен $k_1^1 = \frac{1,12}{1,98} = 0,571$ (57%), а для второго канала – $k_2^2 = \frac{1,26}{1,98} = 0,636$ (64%).

4. На обслуживании 1-м и 2-м каналами заявки находились 2,38 мин. В накопителе вторая заявка находилась 0,02 мин, а пятая заявка – 0,17 мин. Итак, время пребывания в системе 8-и заявок составило 2,57 мин. Среднее время пребывания одной заявки на обслуживании равно

$$T_{\text{сист}} = \frac{2,57}{8} = 0,321 \text{ мин.}$$

LMS-платформа – не предусмотрена

5.1.3. Лабораторные занятия

Примерный перечень тем

1. Простейшие СМО
2. Дисциплины очереди и обслуживания. Приоритеты
3. Свойства потоков

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2. Описание внеаудиторных контрольно-оценочных мероприятий и средств текущего контроля по дисциплине модуля

Разноуровневое (дифференцированное) обучение.

Базовый

5.2.1. Домашняя работа № 1

Примерный перечень тем

1. Простейшие системы массового обслуживания

Примерные задания

Домашняя работа 1. Простейшие системы массового обслуживания.

В предлагаемой работе рассматриваются вопросы, связанные с анализом эффективности трех типов простейших систем массового обслуживания: системы с отказами и двух типов смешанных систем, изучается влияние изменения производительности каналов обслуживания. В ходе анализа этих систем рассчитываются их технические и экономические показатели эффективности, позволяющие выбрать наилучшую в соответствии с заданным критерием оптимальности систему с отказами и одну из смешанных систем.

Проводится сравнение эффективности оптимальной системы с отказами с соответствующей оптимальной смешанной системой, Цель та-кого сравнения заключается в показе, насколько переход от системы с отказами к смешанной системе позволяет улучшить (или ухудшить) её свойства. Кроме того определяется влияние изменения производительности каналов обслуживания на свойства системы, признанной ранее оптимальной.

В ходе выполнения домашнего задания проводится сравнительный анализ эффективности простейших систем массового обслуживания.

К изучаемым системам относятся:

1. Системы с отказами.
2. Системы с ограничением на время пребывания заявки в очереди.
3. Системы с ограничением на длину очереди.

Сравнение систем проводится на основе сопоставления их показателей эффективности, характеризующих изучаемые системы, как с точки зрения потребителей, так и с точки зрения их эксплуатационных свойств.

Варианты заданий к домашней работе
«Простейшие системы массового обслуживания»

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ 1/ед.времени	1,0		4,0		0,5		0,5		2,0	
$\bar{t}_{\text{общ}}$ ед.врем..	2,0		0,5		8,0		12,0		1,0	
СМО с ограничением на <i>время</i> ожидания в очереди	+		+		+		+		+	
СМО с ограничением на <i>длину</i> очереди		+		+		+		+		+

Номер варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
λ 1/ед.времени	1,0		2,0		3,0		4,0		1,0	
$\bar{t}_{\text{общ}}$ ед.врем..	6,0		3,0		2,0		1,5		4,0	
СМО с ограничением на <i>время</i> ожидания в очереди	+		+		+		+		+	
СМО с ограничением на <i>длину</i> очереди		+		+		+		+		+

Номер варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
λ 1/ед.времени	3,0		2,0		4,0		0,5		1,0	
$\bar{t}_{\text{общ}}$ ед.врем..	1,33		2,0		1,0		16		8,0	
СМО с ограничением на <i>время</i> ожидания в очереди	+		+		+		+		+	
СМО с ограничением на <i>длину</i> очереди		+		+		+		+		+

Знаком «+» отмечен тип смешанной системы, соответствующий заданному варианту задания.

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.2. Домашняя работа № 2

Примерный перечень тем

1. Моделирование систем массового обслуживания.

Примерные задания

Домашняя работа 2. Моделирование систем массового обслуживания.

1. Аналитическое моделирование СМО

Задан размеченный граф состояний системы массового обслуживания и параметры системы.

Для заданной системы требуется:

1. Описать динамический режим работы системы.

- Доказать, что динамический режим работы заданной системы может быть описан с дифференциальными уравнениями Колмогорова.

- Привести описание одного из методов численного интегрирования дифференциальных уравнений.

2. Оценить эффективность стационарного режима работы системы.

- Обосновать существование стационарного режима работы системы.

- Записать уравнения Колмогорова для финальных вероятностей состояний.

- Решить полученную систему алгебраических уравнений и найти значения финальных вероятностей (позволяется использовать программу MathCAD). Оценить показатели эффективности системы (в первую очередь λb , Робс и k_3).

3. Представить протекающий в системе случайный процесс как цепь Маркова.

- Изобразить размеченный граф состояний для цепи Маркова.
- Сформировать матрицу переходных вероятностей.
- Провести расчет цепи Маркова (4 – 5 шагов).
- Проверить, наступает ли стационарный режим на исследуемом интервале времени.

Используя программу MathCAD, продлить расчет случайного процесса (увеличить число шагов) и представить графические изображения изменения наиболее значимых вероятностей состояний цепи Маркова $p_i(k)=p_i(tk)$, $i=1,2, \dots, n$, $k=0,1,2, \dots$

4. Каждый пункт выполненного задания должен содержать обсуждение полученных результатов.

5. Поток входных заявок интенсивностью λ и потоки обслуживания с интенсивностями μ_1 и μ_2 и поток ухода заявки из очереди считаются простейшими.

2. Непрерывно-стохастическое моделирование СМО

Задана система массового обслуживания. Ее размеченный граф состояний и параметры.

Приводятся массивы чисел, характеризующих случайные потоки в рассматриваемой системе. Эти массивы чисел являются выборками реализаций случайных величин, имеющих показательное распределение вероятностей с заданным параметром (см. приложение).

Требуется:

1. Подробно описать принципы функционирования системы.
2. Графически представить протекающий в ней случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, протекающий в рассматриваемой системе.
 - Проследить за движением около десяти входных заявок.
 - Привести таблицу используемых случайных реализаций процессов, описывающих потоки событий, фигурирующие в системе.
 - Описать характер протекающего случайного процесса.
3. Привести блок-схему моделирующего алгоритма, ее описание и обозначение используемых переменных.

Вариант 1.

СМО с отказами и последовательным расположением каналов обслуживания.

Двухканальная система. Каналы разной производительности. Поток заявок поступает на первый канал. Если он занят, то заявка поступает на второй канал. Если и второй канал занят – получает отказ и уходит из системы. Эта система с **упорядоченным расположением каналов обслуживания**: заявка, заставшая свободными оба канала обслуживания, обязательно выбирает первый канал. Второй канал выбирается на обслуживание только тогда, когда занят первый канал.

Состояния системы:

- x_{00} – оба канала свободны;
- x_{10} – 1-й канал занят, 2-й канал свободен;
- x_{01} – 1-й канал свободен, 2-й канал занят;
- x_{11} – оба канала заняты обслуживанием

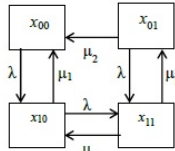


Рис. 1. Граф состояний

- a. $n = 2, \lambda = 4 \text{ 1/мин}, \mu_1 = 4 \text{ 1/мин}, \mu_2 = 2 \text{ 1/мин}.$
- b. $n = 2, \lambda = 4 \text{ 1/мин}, \mu_1 = 2 \text{ 1/мин}, \mu_2 = 5 \text{ 1/мин}.$
- c. $n = 2, \lambda = 5 \text{ 1/мин}, \mu_1 = 4 \text{ 1/мин}, \mu_2 = 2 \text{ 1/мин}.$
- d. $n = 2, \lambda = 3 \text{ 1/мин}, \mu_1 = 2 \text{ 1/мин}, \mu_2 = 2 \text{ 1/мин}.$

Вариант 2.

СМО с отказами и неупорядоченным расположением каналов обслуживания.

Двухканальная система. Каналы разной производительности. В этой системе заявка, заставшая свободными оба канала обслуживания, выбирает тот канал, который раньше закончил обслуживание предыдущей заявки. Первая пришедшая в систему заявка поступает на обслуживание первым каналом, вторая – вторым.

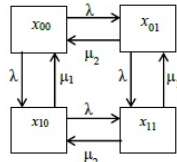


Рис. 2. Граф состояний

На рис. 2 представлен размеченный граф состояний рассматриваемой системы. Ее состояния:

- x_{00} – оба канала свободны;
- x_{10} – 1-й канал занят, 2-й канал свободен;
- x_{01} – 1-й канал свободен, 2-й канал занят;
- x_{11} – оба канала заняты обслуживанием.

- a. $n = 2, \lambda = 3 \text{ 1/мин}, \mu_1 = 4 \text{ 1/мин}, \mu_2 = 2 \text{ 1/мин}.$
- b. $n = 2, \lambda = 3 \text{ 1/мин}, \mu_1 = 2 \text{ 1/мин}, \mu_2 = 4 \text{ 1/мин}.$
- c. $n = 2, \lambda = 5 \text{ 1/мин}, \mu_1 = 4 \text{ 1/мин}, \mu_2 = 2 \text{ 1/мин}.$
- d. $n = 2, \lambda = 4 \text{ 1/мин}, \mu_1 = 2 \text{ 1/мин}, \mu_2 = 5 \text{ 1/мин}.$

Вариант 3.

СМО с ограничением на длину очереди и неупорядоченным расположением каналов обслуживания.

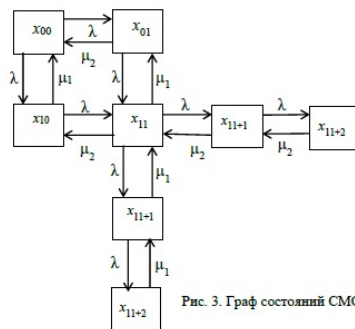


Рис. 3. Граф состояний СМО

Двухканальная система. Каналы разной производительности. В этой системе заявка, заставшая свободными оба канала обслуживания, выбирает тот канал, который раньше закончил обслуживание предыдущей заявки. Первая пришедшая в систему заявка поступает на обслуживание первым каналом, вторая – вторым.

Если заявка застанет все каналы занятыми, то она поступает в накопитель (становится в очередь). Если за время пребывания ее в очереди освободится канал, то заявка поступает на обслуживание этим каналом. Максимальное число мест в очереди равно m . Если заявка, поступившая в систему, застала в ней $(n+m)$ заявок, то она получает отказ и уходит из системы.

На рис. 3 представлен размеченный граф состояний рассматриваемой системы. Ее состояния:

x_{00} – оба канала свободны;

3

LMS-платформа – не предусмотрена

5.3. Описание контрольно-оценочных мероприятий промежуточного контроля по дисциплине модуля

5.3.1. Экзамен

Список примерных вопросов

1. Классификация СМО.
2. Распределение Пуассона, как предельный случай биномиального распределения.
3. Простейший поток событий и его свойства: стационарность, ординарность, отсутствие последействия.
4. Показательное распределение, его свойство, доказывающее отсутствие последействия.
5. Классификация потоков событий.
6. Предельные теоремы для потоков событий.
7. Марковский случайный процесс с дискретными состояниями. Классификация состояний.
8. Цепи Маркова. Пример расчета Марковской цепи. Стационарный режим для цепи Маркова
9. Дискретный Марковский процесс с дискретным временем.
10. Дифференциальные уравнения для вероятностей состояния (система с двумя состояниями и общий случай).

11. Стационарный режим работы системы. Уравнения для финальных вероятностей.
 12. СМО с отказами. Граф состояния. Уравнение Эрланга.
 13. СМО с отказами в установившемся режиме работы системы. Формулы Эрланга.
 14. Показатели эффективности систем с отказами.
 15. Чистая система с ожиданием. Дисциплина очереди. Показатели эффективности.
 16. СМО с ограничением на время пребывания заявки в очереди. Граф состояния. Формулы для финальных вероятностей. Показатели эффективности системы.
 17. СМО с ограничением на время пребывания заявки в очереди. Показатели эффективности системы.
 18. СМО с ограничением на длину очереди. Финальные вероятности. Показатели эффективности системы.
 19. Два последовательно расположенных прибора разной производительности в системе с отказами. Граф состояния. Финальные вероятности. Показатели эффективности системы.
 20. Двухфазная СМО с отказами. Граф состояния. Финальные вероятности. Показатели эффективности системы.
 21. Система с накопителем заявок. Граф состояния. Финальные вероятности. Показатели эффективности системы.
 22. Одноканальная СМО с ожиданием и абсолютным приоритетом. Граф состояния. Финальные вероятности. Показатели эффективности системы.
 23. Одноканальная замкнутая система с ожиданием. Граф состояния. Финальные вероятности. Показатели эффективности системы.
 24. Двухканальная система с ожиданием. Граф состояния. Финальные вероятности. Показатели эффективности системы.
- LMS-платформа – не предусмотрена

5.4 Содержание контрольно-оценочных мероприятий по направлениям воспитательной деятельности

Направление воспитательной деятельности	Вид воспитательной деятельности	Технология воспитательной деятельности	Компетенция	Результаты обучения	Контрольно-оценочные мероприятия
Профессиональное воспитание	проектная деятельность учебно-исследовательская, научно-исследовательская	Технология формирования уверенности и готовности к самостоятельной успешной профессиональной деятельности Технология проектного образования Технология самостоятельной работы	ПК-8	3-2	Домашняя работа № 1 Домашняя работа № 2 Лабораторные занятия Лекции Практические/семинарские занятия