

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ**
Математика

Код модуля
1155509(1)

Модуль
Научно-фундаментальные основы
профессиональной деятельности

Екатеринбург

Оценочные материалы составлены автором(ами):

№ п/п	Фамилия, имя, отчество	Ученая степень, ученое звание	Должность	Подразделение
1	Рыбалко Наталья Михайловна	кандидат физико-математических наук, доцент	Доцент	высшей математики
2	Хребтова Оксана Константиновна	без ученой степени, без ученого звания	Старший преподаватель	высшей математики

Согласовано:

Управление образовательных программ

Р.Х. Токарева

Авторы:

- Рыбалко Наталья Михайловна, Доцент, высшей математики
- Хребтова Оксана Константиновна, Старший преподаватель, высшей математики

1. СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ Математика

1.	Объем дисциплины в зачетных единицах	6	
2.	Виды аудиторных занятий	Лекции Практические/семинарские занятия	
3.	Промежуточная аттестация	Экзамен	
4.	Текущая аттестация	Контрольная работа	4
		Расчетно-графическая работа	4

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ (ИНДИКАТОРЫ) ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ Математика

Индикатор – это признак / сигнал/ маркер, который показывает, на каком уровне обучающийся должен освоить результаты обучения и их предъявление должно подтвердить факт освоения предметного содержания данной дисциплины, указанного в табл. 1.3 РПМ-РПД.

Таблица 1

Код и наименование компетенции	Планируемые результаты обучения (индикаторы)	Контрольно-оценочные средства для оценивания достижения результата обучения по дисциплине
1	2	3
ОПК-2 -Способен формализовывать и решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, используя методы моделирования и математического анализа	Д-1 - Способность к самообразованию, к самостоятельному освоению новых методов математического анализа и моделирования З-1 - Привести примеры использования методов моделирования и математического анализа в решении задач, относящихся к профессиональной деятельности П-1 - Решать поставленные задачи, относящиеся к области профессиональной деятельности, используя	Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Контрольная работа № 3 Контрольная работа № 4 Лекции Практические/семинарские занятия Расчетно-графическая работа № 1 Расчетно-графическая работа № 2 Расчетно-графическая работа № 3 Расчетно-графическая работа № 4 Экзамен

	<p>освоенные за время обучения пакеты прикладных программ для моделирования и математического анализа</p> <p>У-1 - Обоснованно выбрать возможные методы моделирования и математического анализа для предложенных задач профессиональной деятельности</p>	
<p>УК-1 -Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач, в том числе в цифровой среде</p>	<p>Д-6 - Демонстрировать умения четко мыслить и эффективно принимать решения</p> <p>З-8 - Сделать обзор основных видов логики, законов логики, правил и методов анализа</p> <p>З-9 - Демонстрировать понимание смысла построения логических формализованных систем, своеобразии системного подхода к изучению мышления по сравнению с другими науками</p> <p>П-7 - Иметь опыт разработки вариантов решения поставленных задач, совершая мыслительные процедуры и операции в соответствии с законами логики и правилами мышления</p> <p>У-11 - Анализировать, сопоставлять и систематизировать информацию, выводить умозаключения, опираясь на законы логики, и правильно формулировать суждения для решения поставленных задач</p>	<p>Контрольная работа № 1</p> <p>Контрольная работа № 2</p> <p>Контрольная работа № 3</p> <p>Контрольная работа № 4</p> <p>Лекции</p> <p>Практические/семинарские занятия</p> <p>Расчетно-графическая работа № 1</p> <p>Расчетно-графическая работа № 2</p> <p>Расчетно-графическая работа № 3</p> <p>Расчетно-графическая работа № 4</p> <p>Экзамен</p>
<p>ОПК-2 -Способен самостоятельно ставить, формализовывать и решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, используя методы моделирования и математического анализа</p>	<p>Д-1 - Проявлять ответственность и настойчивость в достижении цели</p> <p>З-1 - Сделать обзор основных методов моделирования и математического анализа, применимых для формализации и решения задач профессиональной деятельности</p>	<p>Контрольная работа № 1</p> <p>Контрольная работа № 2</p> <p>Контрольная работа № 3</p> <p>Контрольная работа № 4</p> <p>Лекции</p> <p>Практические/семинарские занятия</p> <p>Расчетно-графическая работа № 1</p> <p>Расчетно-графическая работа № 2</p>

	<p>П-1 - Решать самостоятельно сформулированные практические задачи, относящиеся к профессиональной деятельности методами моделирования и математического анализа, в том числе с использованием пакетов прикладных программ</p> <p>У-1 - Самостоятельно сформулировать задачу области профессиональной деятельности, решение которой требует использования методов моделирования и математического анализа</p>	<p>Расчетно-графическая работа № 3</p> <p>Расчетно-графическая работа № 4</p> <p>Экзамен</p>
<p>УК-1 -Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, выработать стратегию действий, в том числе в цифровой среде</p>	<p>Д-6 - Демонстрировать умения четко мыслить и быстро принимать решения</p> <p>З-8 - Сделать обзор основных видов логики, законов логики, правил и методов анализа</p> <p>З-9 - Демонстрировать понимание смысла построения логических формализованных систем, своеобразии системного подхода к изучению мышления по сравнению с другими науками</p> <p>П-7 - Иметь опыт разработки вариантов решения поставленных задач, совершая мыслительные процедуры и операции в соответствии с законами логики и правилами мышления</p> <p>У-11 - Анализировать, сопоставлять и систематизировать информацию, выводить умозаключения, опираясь на законы логики, и правильно формулировать суждения для решения поставленных задач</p>	<p>Контрольная работа № 1</p> <p>Контрольная работа № 2</p> <p>Контрольная работа № 3</p> <p>Контрольная работа № 4</p> <p>Лекции</p> <p>Практические/семинарские занятия</p> <p>Расчетно-графическая работа № 1</p> <p>Расчетно-графическая работа № 2</p> <p>Расчетно-графическая работа № 3</p> <p>Расчетно-графическая работа № 4</p> <p>Экзамен</p>

3. ПРОЦЕДУРЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ В РАМКАХ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО

**ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ В БАЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЕ
(ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА БРС)**

3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

1. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – 0.4		
Текущая аттестация на лекциях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>контрольная работа</i>	1,4	25
<i>контрольная работа</i>	1,6	25
<i>контрольная работа</i>	1,8	25
<i>контрольная работа</i>	1,14	25
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – 0.4		
Промежуточная аттестация по лекциям – экзамен		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – 0.6		
2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – 0.6		
Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>расчетно-графическая работа</i>	1,6	25
<i>расчетно-графическая работа</i>	1,10	25
<i>расчетно-графическая работа</i>	1,12	25
<i>расчетно-графическая работа</i>	1,15	25
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям – 1		
Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям – нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям – не предусмотрено		
3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на лабораторных занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям – нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		
4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на онлайн-занятиях	Сроки – семестр,	Максимальная оценка в баллах

	учебная неделя	
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям - не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям – нет Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – не предусмотрено		

3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта

Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено		
Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено		

3.1. Процедуры текущей и промежуточной аттестации по дисциплине

2. Лекции: коэффициент значимости совокупных результатов лекционных занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на лекциях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лекциям – не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лекциям – нет Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лекциям – не предусмотрено		
2. Практические/семинарские занятия: коэффициент значимости совокупных результатов практических/семинарских занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на практических/семинарских занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по практическим/семинарским занятиям– не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по практическим/семинарским занятиям– Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по практическим/семинарским занятиям– не предусмотрено		
3. Лабораторные занятия: коэффициент значимости совокупных результатов лабораторных занятий – не предусмотрено		
Текущая аттестация на лабораторных занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах

Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по лабораторным занятиям -не предусмотрено		
Промежуточная аттестация по лабораторным занятиям –нет		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по лабораторным занятиям – не предусмотрено		
4. Онлайн-занятия: коэффициент значимости совокупных результатов онлайн-занятий –1		
Текущая аттестация на онлайн-занятиях	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
<i>освоение онлайн курса</i>	1,17	100
Весовой коэффициент значимости результатов текущей аттестации по онлайн-занятиям -0.4		
Промежуточная аттестация по онлайн-занятиям –экзамен		
Весовой коэффициент значимости результатов промежуточной аттестации по онлайн-занятиям – 0.6		

3.2. Процедуры текущей и промежуточной аттестации курсовой работы/проекта

Текущая аттестация выполнения курсовой работы/проекта	Сроки – семестр, учебная неделя	Максимальная оценка в баллах
Весовой коэффициент текущей аттестации выполнения курсовой работы/проекта– не предусмотрено		
Весовой коэффициент промежуточной аттестации выполнения курсовой работы/проекта– защиты – не предусмотрено		

4. КРИТЕРИИ И УРОВНИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

4.1. В рамках БРС применяются утвержденные на кафедре/институте критерии (признаки) оценивания достижений студентов по дисциплине модуля (табл. 4) в рамках контрольно-оценочных мероприятий на соответствие указанным в табл.1 результатам обучения (индикаторам).

Таблица 4

Критерии оценивания учебных достижений обучающихся

Результаты обучения	Критерии оценивания учебных достижений, обучающихся на соответствие результатам обучения/индикаторам
Знания	Студент демонстрирует знания и понимание в области изучения на уровне указанных индикаторов и необходимые для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Умения	Студент может применять свои знания и понимание в контекстах, представленных в оценочных заданиях, демонстрирует освоение умений на уровне указанных индикаторов и необходимых для продолжения обучения и/или выполнения трудовых функций и действий, связанных с профессиональной деятельностью.
Опыт /владение	Студент демонстрирует опыт в области изучения на уровне указанных индикаторов.

Другие результаты	<p>Студент демонстрирует ответственность в освоении результатов обучения на уровне запланированных индикаторов.</p> <p>Студент способен выносить суждения, делать оценки и формулировать выводы в области изучения.</p> <p>Студент может сообщать преподавателю и коллегам своего уровня собственное понимание и умения в области изучения.</p>
-------------------	---

4.2 Для оценивания уровня выполнения критериев (уровня достижений обучающихся при проведении контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля) используется универсальная шкала (табл. 5).

Таблица 5

Шкала оценивания достижения результатов обучения (индикаторов) по уровням

Характеристика уровней достижения результатов обучения (индикаторов)				
№ п/п	Содержание уровня выполнения критерия оценивания результатов обучения (выполненное оценочное задание)	Шкала оценивания		
		Традиционная характеристика уровня		Качественная характеристика уровня
1.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты в полном объеме, замечаний нет	Отлично (80-100 баллов)	Зачтено	Высокий (В)
2.	Результаты обучения (индикаторы) в целом достигнуты, имеются замечания, которые не требуют обязательного устранения	Хорошо (60-79 баллов)		Средний (С)
3.	Результаты обучения (индикаторы) достигнуты не в полной мере, есть замечания	Удовлетворительно (40-59 баллов)		Пороговый (П)
4.	Освоение результатов обучения не соответствует индикаторам, имеются существенные ошибки и замечания, требуется доработка	Неудовлетворительно (менее 40 баллов)	Не зачтено	Недостаточный (Н)
5.	Результат обучения не достигнут, задание не выполнено	Недостаточно свидетельств для оценивания		Нет результата

5. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МОДУЛЯ

5.1. Описание аудиторных контрольно-оценочных мероприятий по дисциплине модуля

5.1.1. Лекции

Самостоятельное изучение теоретического материала по темам/разделам лекций в соответствии с содержанием дисциплины (п. 1.2. РПД)

5.1.2. Практические/семинарские занятия

Примерный перечень тем

1. Матрицы. Определители. Обратная матрица.
2. Ранг. Матричные уравнения. Системы линейных уравнений. Метод матричного исчисления. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
3. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.
4. Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве.
5. Кривые второго порядка. Поверхности второго порядка
6. Комплексные числа и действия над ними.
7. Понятие функции. Основные свойства функции. Предел последовательности.
8. Предел функции. Непрерывность функции.
9. Производная функции. Дифференциал функции.
10. Правила дифференцирования.
11. Производные высших порядков.
12. Правило Лопитала.
13. Экстремум функции. Выпуклость, вогнутость. Асимптоты. Применение производной для исследования функций.
14. Формула Тейлора
15. Частные производные. Дифференцирование функций нескольких переменных. .
16. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению.

Градиент

17. Экстремум функции нескольких переменных: локальный, глобальный, условный экстремум.

Примерные задания

4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

Пример 1. Показать по определению $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3} - n) = 0$.

Решение: 1) берем $\forall \varepsilon > 0$;

2) ищем $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы для всякого $n > n_0(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $|\sqrt{n^2+3} - n| < \varepsilon$;

3) можно решать неравенство непосредственно $0 < \sqrt{n^2+3} - n < \varepsilon$ или $\sqrt{n^2+3} < n + \varepsilon \Leftrightarrow n^2 + 3 < n^2 + 2\varepsilon n + \varepsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{3 - \varepsilon^2}{2\varepsilon}$ и взять $n_0(\varepsilon) = \frac{3 - \varepsilon^2}{2\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$;

можно решать неравенство $\sqrt{n^2+2} - n < \varepsilon$ с предварительной оценкой

$$\sqrt{n^2+3} - n = \frac{(\sqrt{n^2+3} - n)(\sqrt{n^2+3} + n)}{\sqrt{n^2+3} + n} = \frac{n^2 + 3 - n^2}{\sqrt{n^2+3} + n} = \frac{3}{\sqrt{n^2+3} + n} \leq \frac{3}{n};$$

потребуем $\frac{3}{n} < \varepsilon$ и выберем $n_0(\varepsilon) = \frac{3}{\varepsilon}$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) = \frac{3}{\varepsilon} > 0: \forall n > \frac{3}{\varepsilon} |\sqrt{n^2+3} - n| \leq \frac{3}{n} < \frac{3}{3/\varepsilon} = \varepsilon$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3} - n) = 0.$$

Заметим, что оба решения правильные и для вывода можно использовать любое из найденных значений $n_0(\varepsilon)$.

Пример 2. Показать по определению $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$.

Решение: 1) берем $\forall \varepsilon > 0$;

2) ищем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\forall x, |x| > \delta \Rightarrow |x^3| > \varepsilon$;

3) неравенство $|x^3| > \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \sqrt[3]{\varepsilon}$; выберем $\delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Тогда

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon} > 0 \text{ и такое, что } \forall x, |x| > \sqrt[3]{\varepsilon} \Rightarrow |x^3| = |x|^3 > (\sqrt[3]{\varepsilon})^3 = \varepsilon.$$

Пример 3. Показать по определению $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$.

Решение: 1) берем $\forall \varepsilon > 0$;

2) ищем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\forall x, 0 < |x - 2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x^3 - 8| < \varepsilon$;

3) прежде чем решать неравенство $|x^3 - 8| < \varepsilon$, оценим выражение $|x^3 - 8| = |x - 2| \cdot |x^2 + 2x + 4| \leq |x - 2| \cdot 20$; здесь полагаем $|x - 2|$ - малым, например, $|x - 2| < 1$, т.е. $1 < x < 3$, и тогда $1 < x^2 < 9$ и $2 < 2x < 6$, т.е. $7 < x^2 + 2x + 4 \leq 19 < 20$.

Потребуем $20 \cdot |x - 2| < \varepsilon$, т.е. $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{20} = \delta(\varepsilon)$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{20}: \forall x, |x - 2| < \frac{\varepsilon}{20}$;

$$|x^3 - 8| < 19 \cdot |x - 2| < \frac{19}{20} \varepsilon < \varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8.$$

Пример 4. Показать $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{6n^2 + n + 1} = \frac{5}{6}$.

Решение: 1) берем $\forall \varepsilon > 0$;

2) ищем $n_0(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\forall n > n_0(\varepsilon) \left| \frac{5n^2}{6n^2 + n + 1} - \frac{5}{6} \right| < \varepsilon$;

3) считаем $\left| \frac{5n^2}{6n^2 + n + 1} - \frac{5}{6} \right| = \left| \frac{30n^2 - 5 \cdot 6n^2 - 5n - 5}{(6n^2 + n + 1) \cdot 6} \right| = \left| \frac{5(n+1)}{6(6n^2 + n + 1)} \right|$;

оцениваем $\frac{n+1}{6n^2 + n + 1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n^2 + n + 6n^2 + n + 1 \Leftrightarrow 0 < 5n^2 + 1$ - верно при любом

$n \in \mathbb{N}$; выберем $n_0(\varepsilon)$ из условия $\left| \frac{5n^2}{6n^2 + n + 1} - \frac{5}{6} \right| < \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{5}{6 \cdot \varepsilon} = n_0(\varepsilon)$.

Вывод: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) = \frac{5}{6\varepsilon}: \forall n > \frac{5}{6\varepsilon} \left| \frac{5n^2}{6n^2 + n + 1} - \frac{5}{6} \right| < \varepsilon$, т.е. по

определению конечного предела последовательности имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{6n^2 + n + 1} = \frac{5}{6}$.

5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ.

Определение. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Это равенство означает выполнение трех условий:

- 1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности,
- 2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$ или, что равносильно, существуют и равны односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$,
- 3) предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен значению функции в точке x_0 .

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Для $x < 0$ функция $f(x) = \frac{|x|}{x} = -1$ совпадает с непрерывной элементарной функцией, и следовательно, непрерывна. Аналогично, если $x > 0$, то функция $f(x) = 1$ также непрерывна. Рассмотрим точку $x = 0$. Вычислим пределы слева и справа при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 = 1.$$

Односторонние пределы конечны, но не равны между собой, следовательно, $x = 0$ – точка конечного разрыва 1 рода (скачок). В других точках функция $f(x)$ непрерывна.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} x, & x < -1, \\ x^2 - 2, & x > -1, \\ 0, & x = -1. \end{cases}$

Решение. При $x < -1$ и $x > -1$ функция $f(x)$ совпадает с непрерывными элементарными функциями, следовательно, непрерывна. Исследуем точку $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (x^2 - 2) = -1.$$

6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ.

6.1 Определение производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда существует ее производная в этой точке. При этом выражение $df(x) = f'(x) \cdot dx$ есть дифференциал функции.

Из дифференцируемости функции следует ее непрерывность. Обратное неверно.

Пример 1. Является ли заданная функция $f(x)$ дифференцируемой? непрерывной?

$$a) f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ e^x, & x > 0. \end{cases}$$

Решение. Имеет смысл сначала исследовать функцию на дифференцируемость, так как если функция является дифференцируемой, то исследовать её на непрерывность нет необходимости.

а). Исследуем точку $x = 0$. Найдем предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Этот предел не существует и, следовательно, функция $f(x)$ не является дифференцируемой в точке $x = 0$. В точках $x \neq 0$ функция $f(x)$

Таким образом, односторонние пределы существуют, конечны и равны между собой, то есть существует $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$, но $f(-1) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, и следовательно, $x = -1$ есть точка устранимого разрыва 1-го рода. В остальных точках функция $f(x)$ непрерывна.

Пример 3. Исследовать функцию на непрерывность, указать тип точек

разрыва: $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ не определена в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. В точках $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$ функция $f(x)$ является суперпозицией элементарных функций, непрерывных на своей области определения, то есть $f(x)$ непрерывна во всех точках, кроме точек $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Исследуем функцию в точке $x = 0$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln|x|} = 0$. Предел функции при $x \rightarrow 0$ существует, но функция $f(x)$ в точке $x = 0$ не определена, поэтому $x = 0$ – точка устранимого разрыва 1-го рода. Разрыв можно устранить, если $f(x)$ доопределить, положив $f(0) = 0$, тогда функция $f(x)$ будет являться непрерывной в точке .

Исследуем функцию в точках $x = \pm 1$. Так как $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \ln|x| = 0$, то $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{1}{\ln|x|} = \infty$. Пределы функции при $x \rightarrow \pm 1$ бесконечны, следовательно, $x = \pm 1$ – точки разрыва второго рода.

дифференцируема как суперпозиция дифференцируемых функций и, следовательно, непрерывна.

Исследуем функцию на непрерывность в точке $x = 0$. Так как x – бесконечно малая функция при $x \rightarrow 0$, а функция $\sin \frac{1}{x}$ – ограничена, то

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, то есть функция $f(x)$ – непрерывна в точке $x = 0$, хотя и не дифференцируема в этой точке.

б). Исследуем функцию $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ e^x, & x > 0, \end{cases}$ на дифференцируемость.

Найдем производную в точке $x = 0$, используя определение производной:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = (e^x)' \Big|_{x=0} = 1; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = (x+1)' \Big|_{x=0} = 1.$$

Следовательно, $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 1$ и функция $f(x)$ дифференцируема при $x = 0$. В точках $x \neq 0$ функция $f(x)$ дифференцируема, так как совпадает с дифференцируемыми элементарными функциями. Из дифференцируемости функции следует ее непрерывность на всей числовой оси.

6.2 Геометрический смысл производной

Значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 с абсциссой x_0 :

$$f'(x_0) = k_{кас.}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящим через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

7. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ФОРМУЛЫ ПРОИЗВОДНЫХ КОНКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ.

При изучении этой темы следует использовать таблицу производных и правила дифференцирования.

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $y = x^2 e^x$, б) $y = \frac{\arcsin x}{x}$, в) $y = 5 \cos x + x^2 + \ln x$.

Решение. а) Воспользуемся формулой $(uv)' = u'v + v'u$, из которой следует, что

$$y' = (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + (e^x)' x^2 = 2x e^x + x^2 e^x.$$

б) Воспользуемся формулой $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, из которой следует, что

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)' = \frac{x \cdot (\arcsin x)' - \arcsin x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

в) $y' = (5 \cos x + x^2 + \ln x)' = 5 \cdot (\cos x)' + (x^2)' + (\ln x)' = -5 \sin x + 2x + \frac{1}{x}$.

Примеры для самостоятельного решения:

1) $y = \frac{\arccos x}{2x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $y = \frac{2^x(\sin x + \ln 2 \cdot \cos x)}{1 + (\ln 2)^2}$;
 3) $y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x}{2} + \arcsin 3$; 4) $y = \frac{\sin \alpha}{\ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha)}$;
 5) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$; 6) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$;

8. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Пример 1. Найти $y^{(n)}$, если а) $y = \ln x$, б) $y = 2^x$.

Решение. а) Для функции $y = \ln x$ имеем:

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -1 \cdot x^{-2}, \quad y''' = -1 \cdot (-2) x^{-3}, \quad y^{(4)} = (-1)(-2)(-3) x^{-4}, \dots,$$

$$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)(-1)^{n-1} x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

б) Для функции $y = 2^x$ имеем:

$$y' = 2^x \cdot \ln 2, \quad y'' = 2^x \ln^2 2, \quad y''' = 2^x \ln^3 2, \dots, \quad y^{(n)} = 2^x \ln^n 2.$$

8.1. Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной функции $y = f(x)$ удобно равенство $y = f(x)$ сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать. Такой прием называют логарифмическим дифференцированием. Его полезно применять для дифференцирования произведения многих сомножителей, или для дифференцирования частного, числитель и знаменатель которого содержит несколько множителей, или для дифференцирования степенно-показательных функций $u(x)^{v(x)}$.

Пример 2. Найти производную $y = (\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. Здесь основание и показатель степени зависят от x . Логарифмируя, получим $\ln y = \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x)$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x : $(\ln y)'_x = (\operatorname{ctg} x)'_x \cdot \ln(\sin x) + \operatorname{ctg} x \cdot (\ln(\sin x))'_x$,

$$\frac{1}{y} \cdot y'_x = \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x + \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Тогда $y'_x = y \left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1 \right) = (\sin x)^{\operatorname{ctg} x} \cdot \left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1 \right)$.

7) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$; 8) $y = \frac{\operatorname{sh} 3x}{1 + \operatorname{ch} 3x}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin x}{b}$; 10) $y = e^{\alpha} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}$;

Вычислить предел функции, используя правило Лопиталя:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$); 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{a^x}$ ($\alpha > 0, a > 1$);

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\arcsin x}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2}$; 6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$;

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}$;

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2} \right)$; 10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]$.

Пример 3. Найти производную функции $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}$.

Решение. Находить y' как производную произведения слишком громоздко. Удобнее применить логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}} = \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt{\sin x} + \ln \sqrt{1 - e^x},$$

$$y = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln \sin x + \frac{1}{4} \ln(1 - e^x).$$

Продифференцируем последнее равенство по x :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1 - e^x)} \cdot (-e^x).$$

Выразим y' : $y' = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}} \cdot \left(\frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{2 \sin x} - \frac{e^x}{4(1 - e^x)} \right)$.

8.2 Дифференцирование параметрически заданных функций

Пусть функция задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Если существуют $y'(t)$ и $x'(t) \neq 0$, тогда существует y'_x , причем

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Пример 4. Найти y'_x и y''_{xx} для функции, заданной параметрическими уравнениями: $x = \ln t$, $y = t^2 - 1$.

Решение. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{\frac{1}{t}} = 2t^2$, $y''_{xx} = \frac{(2t^2)'_t}{x'_t} = \frac{4t}{\frac{1}{t}} = 4t^2$.

LMS-платформа

1. Математический анализ [онлайн-курс]. URL: <https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

2. Основные приложения линейной алгебры в инженерном образовании: векторная алгебра и аналитическая геометрия [онлайн-курс]

URL: <https://openedu.ru/course/urfu/LineAlg/>

5.2. Описание внеаудиторных контрольно-оценочных мероприятий и средств текущего контроля по дисциплине модуля

Разноуровневое (дифференцированное) обучение.

Базовый

5.2.1. Контрольная работа № 1

Примерный перечень тем

1. Матрицы

Примерные задания

Вариант № 1

1. Вычислить $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Можно ли перемножить матрицы в обратном порядке?

2. Найти $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 5$.

3. Найти A^{-1} двумя способами, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -3 & 7 & -5 \\ 6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричные уравнения:

а) $B \cdot X = A$,

б) $X \cdot A = B$,

в) $2A \cdot X - 2 \cdot X = B$,

если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

LMS-платформа

1. Основные приложения линейной алгебры в инженерном образовании: векторная алгебра и аналитическая геометрия [онлайн-курс]

URL:<https://openedu.ru/course/urfu/LineAlg/>

5.2.2. Контрольная работа № 2

Примерный перечень тем

1. Векторная алгебра

Примерные задания

Вариант № 1

1. Дан вектор $\vec{a} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти вектор \vec{b} , параллельный вектору \vec{a} , противоположного с ним направления, при условии, что $|\vec{b}| = 75$.
2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{m} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 2$ и $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{11}$.
3. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Вычислить проекцию вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ на ось, составляющую с координатными осями Oy, Oz углы $\beta = 120^\circ, \gamma = 135^\circ$, а с осью Ox - тупой угол α .
4. Вектор \vec{x} , перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \{6; -6; -6\}$ и $\vec{b} = \{2; 0; -8\}$ образует с осью Oz острый угол. Зная, что $|\vec{x}| = \sqrt{26}$, найти его координаты.
5. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 135° .
6. Даны вершины тетраэдра: $A(-1; 2; 4), B(-1; -2; -4), C(3; 0; -1), D(7; -3; 1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .

LMS-платформа

1. Основные приложения линейной алгебры в инженерном образовании: векторная алгебра и аналитическая геометрия [онлайн-курс]

URL: <https://openedu.ru/course/urfu/LineAlg/>

5.2.3. Контрольная работа № 3

Примерный перечень тем

1. Аналитическая геометрия

Примерные задания

Контрольная работа «Аналитическая геометрия»

Вариант № 1

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1, -1, 2)$, перпендикулярно к плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
2. Найти угол между прямыми $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$.
3. Через точку $P(1, 0, 7)$ параллельно плоскости $3x - y + 2z - 15 = 0$ провести прямую так, чтобы она пересекала прямую $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$.

LMS-платформа

1. Основные приложения линейной алгебры в инженерном образовании: векторная алгебра и аналитическая геометрия [онлайн-курс]

URL: <https://openedu.ru/course/urfu/LineAlg/>

5.2.4. Контрольная работа № 4

Примерный перечень тем

1. Производные. Правило Лопитала

Примерные задания

Вариант 1

1. Найти производные функций:

$$\text{а) } y = \frac{\sqrt{x^3 + 4}}{x^2 - 1} + 3^{\sin x} \cdot \ln(1 - x^4) + \pi^e; \quad \text{б) } y = \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\ln x}.$$

2. Вычислить предел, используя правило Лопитала: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$.

3. Найти угол между линиями $y = 8 - x^2$, $y = x^2$.

LMS-платформа

1. Математический анализ [онлайн-курс]. URL: <https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

5.2.5. Расчетно-графическая работа № 1

Примерный перечень тем

1. Комплексные числа

Примерные задания

Вариант 1.

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $2-2j$;

2) -1 ;

3) $\frac{\pi}{4}$;

4) $-1-j\sqrt{3}$;

5) $-2+5j$.

2. Решить систему:
$$\begin{cases} (2-j)x+(3+2j)y=3-6j \\ (1-j)x-(2+j)y=-1 \end{cases}$$

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(\frac{1+j}{4}\right)^7$;

2) $(1+j\sqrt{3})^6$;

3) $f(z)=(z-1)^5+\frac{1}{z-3}$. Найти $f(1+2j)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{1+j}$;

2) $\sqrt[4]{-1}$;

3) $\sqrt[3]{8}$;

4) $\sqrt{8-6j}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2+(1-2j)z-2j=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z-3j|\geq 3$;

2) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1$;

3) $|z-2j|=|z+2j|$.

LMS-платформа

1. Математический анализ [онлайн-курс]. URL:<https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

5.2.6. Расчетно-графическая работа № 2

Примерный перечень тем

1. Кривые второго порядка

Примерные задания

Расчетно-графическая работа «Набор кривых»

Вариант 1

I. Привести уравнения кривых 2-го порядка к каноническому виду и построить кривые:

1. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

4. $x = \sqrt{6 - 3y^2 + 6y}$

2. $x^2 - 4y^2 - 8x - 16y - 16 = 0$

5. $y = -2 + \sqrt{5 + (x+4)^2}$

3. $2x^2 - 4x - y + 11 = 0$

6. $y = 1 - 2\sqrt{x+1}$

II. Построить кривые в полярной системе координат:

1. $\rho = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$

5. $\rho = 0.2 / \sin \varphi$

2. $\rho = a / \varphi$

6. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

3. $\rho = 3 + \cos \varphi$

7. $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$

4. $\rho = a \cdot \sin \varphi$

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.7. Расчетно-графическая работа № 3

Примерный перечень тем

1. Функция одной переменной

Примерные задания

Задача 1. Найти угол между кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$. Сделать рисунок. Написать уравнения касательных к графикам функций в точке их пересечения.

Задача 2. Вычислить производную функции $f(x)$ (продифференцировать функцию $f(x)$):

$$1) y = \frac{\arccos x}{2x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad 2) y = \frac{2^x (\sin x + \ln 2 \cdot \cos x)}{1 + (\ln 2)^2};$$

$$3) y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \arcsin 3; \quad 4) y = \frac{\sin \alpha}{\ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha)};$$

Задача 3. Вычислить предел функции, используя правило Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\arcsin x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2};$$

Задача 4. Используя формулу Тейлора,

вычислить приближенно $(1,98)^6$, используя представление функции

$f(x) = x^6$ по формуле Тейлора, взяв $n = 2$; оценить погрешность;

LMS-платформа

1. Математический анализ [онлайн-курс]. URL: <https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

5.2.8. Расчетно-графическая работа № 4

Примерный перечень тем

1. Функция нескольких переменных

Примерные задания

Дифференцирование функции нескольких переменных.

ЗАДАЧА 1. Показать, что функция $z = f(x, y)$ или $u = \phi(x, y, z)$ удовлетворяет соответствующему уравнению:

Варианты:

1.
$$z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5};$$

ЗАДАЧА 2. Вычислить все производные первого порядка по независимым аргументам сложной функции.

Варианты:

1.
$$z = y \cdot \operatorname{arctg}(x/y), \quad x = t^2 - 1, \quad y = t^3;$$

ЗАДАЧА 3. Написать формулу Тейлора для функции $f(x, y)$ в окрестности точки M_0 при $n = 2$.

Варианты:

1.
$$f(x, y) = 2xy^2 + 3x^2y - 5xy + 8, \quad M_0(1; 1);$$

ЗАДАЧА 4. Исследовать функцию $f(x, y)$ на локальный экстремум.

Варианты:

1.
$$f(x, y) = 2x^3 - x^2 + xy^2 - 4x + 3;$$

ЗАДАЧА 5. Найти *absextr* $f(x, y)$ в замкнутой области D , заданной системой неравенств.

Варианты:

1.
$$z = x^2 + y^2 - 9xy + 27; \quad D: 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 3;$$

LMS-платформа

1. Математический анализ [онлайн-курс]. URL:<https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

Продвинутый

5.2.1. Контрольная работа № 1

Примерный перечень тем

1. Комплексные числа

Примерные задания

Вариант 1.

1. Представить в тригонометрической форме числа:
 - 1) $2-2j$;
 - 2) -1 ;
 - 3) $\frac{\pi}{4}$;
 - 4) $-1-j\sqrt{3}$;
 - 5) $-2+5j$.
2. Решить систему:
$$\begin{cases} (2-j)x+(3+2j)y=3-6j \\ (1-j)x-(2+j)y=-1 \end{cases}$$
3. Выполнить указанные действия:
 - 1) $\left(\frac{1+j}{4}\right)^7$;
 - 2) $(1+j\sqrt{3})^6$;
 - 3) $f(z)=(z-1)^5+\frac{1}{z-3}$. Найти $f(1+2j)$.
4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:
 - 1) $\sqrt[3]{1+j}$;
 - 2) $\sqrt[4]{-1}$;
 - 3) $\sqrt[3]{8}$;
 - 4) $\sqrt{8-6j}$.
5. Решить квадратное уравнение: $z^2+(1-2j)z-2j=0$.
Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.
6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:
 - 1) $|z-3j|\geq 3$;
 - 2) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=1$;
 - 3) $|z-2j|=|z+2j|$.

LMS-платформа

1. Основные приложения линейной алгебры в инженерном образовании: векторная алгебра и аналитическая геометрия [онлайн-курс]
URL:<https://openedu.ru/course/urfu/LineAlg/>

5.2.2. Контрольная работа № 2

Примерный перечень тем

1. Векторная алгебра

Примерные задания

Вариант № 1

1. При каком условии вектор $\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} - \vec{b}$?
2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$, если \vec{a} и \vec{b} – единичные векторы и $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$.
3. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}$ и $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Вычислить проекцию вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oy углы $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ$, а с осью Oz – тупой угол γ .
4. Вектор \vec{x} , перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \{-1; 0; 2\}$ и $\vec{b} = \{2; 2; -10\}$ образует с осью Ox острый угол. Зная, что $|\vec{x}| = \sqrt{14}$, найти его координаты.
5. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 60° .
6. Даны вершины тетраэдра: $A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(-4; -3; 7)$.
Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.3. Контрольная работа № 3

Примерный перечень тем

1. Пределы ФОП

Примерные задания

Вариант 1

А. Вычислить пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x+1}{2x+1} \right)^{\frac{3x+1}{x^2}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2(3x)}{x \cdot \operatorname{arctg}(\pi x)} \right)$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n-4})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x)^{\frac{3}{\cos 2x}}$$

В. Исследовать на непрерывность:

$$1. f(x) = \frac{(x+2) \cdot 2^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}, \quad 2. f(x) = \begin{cases} x - 3x^2, & -4 \leq x < 0, \\ \frac{x}{2x+1}, & 0 \leq x < 3, \\ 3x - 2, & 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

LMS-платформа

1. Математический анализ [онлайн-курс]. URL: <https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

5.2.4. Контрольная работа № 4

Примерный перечень тем

1. Производные

Примерные задания

Задача 1. Вычислить $f'(x_0)$ по определению, если $f(x) = \sqrt{a+bx}$, $x_0 = c$, где a – количество букв в имени студента, b – количество букв в фамилии студента, c – количество букв в отчестве студента

Задача 2. Найти угол между кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$. Сделать рисунок. Написать уравнения касательных к графикам функций в точке их пересечения.

Задача 3. Вычислить производную функции $f(x)$ (продифференцировать функцию $f(x)$):

$$1) y = \frac{\arccos x}{2x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad 2) y = \frac{2^x (\sin x + \ln 2 \cdot \cos x)}{1 + (\ln 2)^2};$$

$$3) y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \arcsin 3; \quad 4) y = \frac{\sin \alpha}{\ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha)};$$

Задача 4. Вычислить предел функции, используя правило Лопитала:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0); \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \quad (\alpha > 0, a > 1);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\arcsin x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2};$$

Задача 5. Используя формулу Тейлора,

1) линейризовать функцию $y = \ln x$ в точке $(e, 1)$;

2) вычислить приближенно $(1,98)^6$, используя представление функции $f(x) = x^6$ по формуле Тейлора, взяв $n = 2$; оценить погрешность;

3) вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$.

LMS-платформа

1. Математический анализ [онлайн-курс]. URL: <https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

5.2.5. Расчетно-графическая работа № 1

Примерный перечень тем

1. Введение в математический анализ

Примерные задания

Вариант 1

1. Найти с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ корни квадратного уравнения $1,31ax^2 - 9,72bx + 5,94c = 0$, где a – количество букв в имени студента, b – количество букв в отчестве студента, c – количество букв в фамилии студента.

Сделать проверку и вывод.

2. Построить графики функций, указав область задания, симметричность графика, промежутки монотонности:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}; \\ \text{б) } y &= -2\cos(2 - 2x) + 2; \\ \text{в) } y &= \sqrt{(x^2 - 8x + 16) - 2|x|}; \end{aligned} \quad \text{г) } y = \begin{cases} x+1, & \text{если } -2 \leq x \leq 0; \\ x^2 - x + 1, & \text{если } 0 < x \leq 2; \\ x/(x+1), & \text{если } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

3. Доказать сходимость последовательности с общим членом $S_n = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(2n-1)}$.

4. Исследовать на непрерывность в области определения:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{1/|x|} * (x-1)}, & \text{если } x \neq 1, x \neq 0. \\ 0, & \text{если } x = 1, x = 0. \end{cases}$$

5. Вычислить:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x + \sqrt{(x + \sqrt{x}))})}}; & \quad \text{б) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 4/x)^{5x}; \\ \text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^4 - 2x^3 + 1}; & \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \right)^{2+x^2}. \end{aligned}$$

LMS-платформа – не предусмотрена

5.2.6. Расчетно-графическая работа № 2

Примерный перечень тем

1. Набор кривых

Примерные задания

Расчетно-графическая работа «Набор кривых»

Вариант 1

I. Привести уравнения кривых 2-го порядка к каноническому виду и построить кривые:

1. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

4. $x = \sqrt{6 - 3y^2 + 6y}$

2. $x^2 - 4y^2 - 8x - 16y - 16 = 0$

5. $y = -2 + \sqrt{5 + (x+4)^2}$

3. $2x^2 - 4x - y + 11 = 0$

6. $y = 1 - 2\sqrt{x+1}$

II. Построить кривые в полярной системе координат:

1. $\rho = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$

5. $\rho = 0.2 / \sin \varphi$

2. $\rho = a / \varphi$

6. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

3. $\rho = 3 + \cos \varphi$

7. $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$

4. $\rho = a \cdot \sin \varphi$

LMS-платформа

1. Основные приложения линейной алгебры в инженерном образовании: векторная алгебра и аналитическая геометрия [онлайн-курс]

URL:<https://openedu.ru/course/urfu/LineAlg/>

5.2.7. Расчетно-графическая работа № 3

Примерный перечень тем

1. Функция одной переменной

Примерные задания

Вариант 1

1. Провести полное исследование и

⊕ построить графики функций:

$$a) f(x) = \frac{x^3(x+3)}{(x+1)^3}; \quad б) f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1});$$

$$в) f(x) = \frac{\sin^2 x}{2 - \sin x}; \quad г) f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)x;$$

$$д) f(x) = \exp\left\{\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}\right\}; \quad е) f(x) = x - \ln(x+1).$$

3. Показать, что уравнение $e^{x-2} + 3x^3 - 4 = 0$ имеет единственный действительный корень; найти интервал его изоляции длиной 1.

4. Показать справедливость неравенства $\arcsin x > x + x^3/6$ ($0 < x < 1$).

5. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскизы графиков функций

$$f(x) = \frac{x^4 - ax^2}{(x-b)^2(x-c)^3}; \quad g(x) = \log_{1/2}(x-a)^2.$$

где a – количество букв в имени студента, b – количество букв в фамилии студента, c – количество букв в отчестве студента

LMS-платформа

1. Математический анализ [онлайн-курс]. URL:<https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

5.2.8. Расчетно-графическая работа № 4

Примерный перечень тем

1. Дифференцирование ФНП

Примерные задания

Дифференцирование функции нескольких переменных.

ЗАДАЧА 1. Найти и построить область определения $D(f)$ функции $z = f(x, y)$; указать свойства множества $D(f)$: ограниченность, связность, открытость, замкнутость; вычислить частные производные первого и второго порядков; убедиться в равенстве смешанных производных.

Варианты:

1. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} + \ln(xy)$;

ЗАДАЧА 2. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0 . Сделать схематичный рисунок.

Варианты:

1. $z = x^2 + y^2$, $M_0 = (1, 2, 5)$;

ЗАДАЧА 3. Показать, что функция $z = f(x, y)$ или $u = \phi(x, y, z)$ удовлетворяет соответствующему уравнению:

Варианты:

1. $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$;

ЗАДАЧА 4. Вычислить все производные первого порядка по независимым аргументам сложной функции.

Варианты:

1. $z = y \cdot \operatorname{arctg}(x/y)$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3$;

ЗАДАЧА 5. Написать формулу Тейлора для функции $f(x, y)$ в окрестности точки M_0 при $n = 2$.

Варианты:

1. $f(x, y) = 2xy^2 + 3x^2y - 5xy + 8$, $M_0(1; 1)$;

ЗАДАЧА 6. Исследовать функцию $f(x, y)$ на локальный экстремум.

Варианты:

1. $f(x, y) = 2x^3 - x^2 + xy^2 - 4x + 3$;

ЗАДАЧА 7. Найти *abs extr* $f(x, y)$ в замкнутой области D , заданной системой неравенств.

Варианты:

1. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$; $D: 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 3$;

LMS-платформа

1. Математический анализ [онлайн-курс]. URL:<https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

5.3. Описание контрольно-оценочных мероприятий промежуточного контроля по дисциплине модуля

5.3.1. Экзамен

Список примерных вопросов

1. Матрицы. Определители. Обратная матрица.
2. Ранг. Матричные уравнения. Системы линейных уравнений. Метод матричного исчисления. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
3. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.
4. Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве.
5. Кривые второго порядка. Поверхности второго порядка
6. Комплексные числа и действия над ними.
7. Понятие функции. Основные свойства функции..
8. Предел последовательности.
9. Предел функции. Непрерывность функции
10. Производная функции.
11. Дифференциал функции. Правила дифференцирования. Производные высших порядков.
12. Правило Лопитала. Экстремум функции. Выпуклость, вогнутость. Асимптоты. Применение производной для исследования функций.
13. Формула Тейлора.
14. Частные производные.
15. Производная по направлению. Градиент.
16. Экстремум функции нескольких переменных: локальный, глобальный, условный экстремум.
17. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

LMS-платформа

1. Основные приложения линейной алгебры в инженерном образовании: векторная алгебра и аналитическая геометрия [онлайн-курс]
URL:<https://openedu.ru/course/urfu/LineAlg/>
2. Математический анализ [онлайн-курс]. URL:<https://openedu.ru/course/urfu/CALC/>

5.4 Содержание контрольно-оценочных мероприятий по направлениям воспитательной деятельности

Направление воспитательной деятельности	Вид воспитательной деятельности	Технология воспитательной деятельности	Компетенция	Результаты обучения	Контрольно-оценочные мероприятия
Профессиональное воспитание	учебно-исследовательская, научно-исследовательская	Технология формирования уверенности и готовности к самостоятельной успешной профессиональной деятельности	ОПК-2	Д-1	Контрольная работа № 1 Контрольная работа № 2 Контрольная работа № 3 Контрольная работа № 4 Расчетно-графическая работа № 1 Расчетно-графическая работа № 2

					Расчетно- графическая работа № 3 Расчетно- графическая работа № 4 Экзамен
--	--	--	--	--	---