


УТВЕРЖДАЮ
Проректор по науке


_____ А.В. Германенко

_____ 2022 г.



ПРОГРАММА
вступительных испытаний в аспирантуру
по группе научных специальностей
1.1. Математика и механика

Екатеринбург
2022

Содержание	стр.
1. Назначение и область применения.....	3
2.1 Научная специальность 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.....	3
2.2 Научная специальность 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика	6
2.3 Научная специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика	8
2.4 Научная специальность 1.1.6. Вычислительная математика.....	12
2.5 Научная специальность 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин.....	13
2.6 Научная специальность 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы.....	15
3. Критерии оценки знаний.....	16
4. Рекомендуемые Интернет-ресурсы	17
Лист согласования	19

1. Назначение и область применения

Программа определяет требования к содержанию вступительных испытаний в аспирантуру по группе научных специальностей 1.1. «Математика и механика».

Программа предназначена для подготовки к вступительному экзамену в аспирантуру по следующим научным специальностям из группы научных специальностей 1.1. «Математика и механика»:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика
- 1.1.6. Вычислительная математика
- 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин
- 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

Целью вступительного экзамена является проверка способности и готовности претендента к обучению по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (адъюнктуре), в соответствии с федеральными государственными требованиями (приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 20 октября 2021 г. № 951), выполнению профессиональных задач в сфере научной деятельности.

Форма проведения вступительного экзамена

Вступительные испытания проводятся в форме устного собеседования по билетам. В состав билета входит два вопроса, перечень которых доводится до сведения поступающих путем публикации программ вступительных испытаний на официальном сайте.

При необходимости вступительные испытания могут быть проведены в дистанционном формате. Перед началом дистанционных вступительных испытаний члены экзаменационных комиссий идентифицируют поступающего путем визуальной сверки предъявляемой через видеосвязь фотографии в паспорте с абитуриентом, вышедшим на связь. В случае не прохождения (отказа от прохождения) абитуриентом идентификации, вступительное испытание для данного абитуриента прекращается с оформлением документов о выбытии абитуриента из конкурса.

Требования к процедуре вступительного экзамена

Требования к порядку планирования, организации и проведения вступительного экзамена, к структуре и форме документов по его организации определены Правилами приема поступающих на обучение по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре.

2.1. Научная специальность 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Содержание программы

Множество вещественных чисел. Верхняя и нижняя грани числового множества. Принцип вложенных отрезков.

Функции одного переменного. Непрерывные функции. Теорема Коши о промежуточных значениях. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Дифференцируемые функции одного переменного. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Интегральное исчисление. Определенный интеграл Римана по отрезку. Существование интеграла. Интегрируемость непрерывной функции. Первая и вторая теоремы о среднем значении интеграла. Замена переменного в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Формула Ньютона – Лейбница.

Понятие метрического пространства, полнота, принцип сжимающих отображений, компактность. Компактность в пространстве \mathbf{R}^m ; лемма Бореля о покрытиях. Свойства функций, непрерывных на компакте: теорема Вейерштрасса; равномерная непрерывность, теорема Кантора.

Функции нескольких переменных. Непрерывность. Дифференцируемость. Частные производные. Полный дифференциал. Достаточное условие дифференцируемости. Достаточное условие равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Локальный экстремум; необходимое и достаточное условия локального экстремума. Неявные функции. Условный локальный экстремум; метод неопределенных множителей Лагранжа. Мера Жордана в \mathbf{R}^m . Кратный интеграл Римана. Сведение двойного интеграла к повторным. Замена переменного.

Числовые ряды: сходимость и сумма числового ряда; критерий Коши. Признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов: перестановка членов, произведение.

Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость; критерий Коши равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса и Дирихле – Абеля. Теоремы о предельном переходе, непрерывности, почленном интегрировании и дифференцировании. Теорема Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной на отрезке функции алгебраическими многочленами.

Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости; теорема Коши – Адамара. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда; ряд Тейлора. Ряды Тейлора (Маклорена) элементарных функций.

Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру собственных интегралов. Несобственные интегралы, зависящие от параметра, равномерная сходимость. Признаки Вейерштрасса и Дирихле – Абеля равномерной сходимости интеграла. Предельный переход под знаком несобственного интеграла. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование несобственного интеграла по параметру. Интегралы Эйлера (Г- и В-функции Эйлера); формула Стирлинга.

Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Стокса и Гаусса – Остроградского.

Ряды Фурье по тригонометрической системе. Теорема Кантора – Лебега для коэффициентов Фурье. Поточечная и равномерная сходимости рядов Фурье.

Гильбертово пространство. Общий вид линейного функционала; сопряженное пространство. Ортогональные системы элементов; замкнутость, полнота. Сходимость рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

Мера Лебега на числовой прямой. Построение и основные свойства; счетная аддитивность. Измеримые функции. Сходимость почти всюду и по мере; теоремы Лебега и Рисса. Теорема Егорова. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Пространство L_p , $1 \leq p < \infty$. Неравенства Гельдера и Минковского. Полнота пространства L_p . Плотность классических множеств функций в пространстве $L_p[a, b]$.

Преобразование Фурье в L_1 и L_2 . Теорема Планшереля.

Функции комплексного переменного. Дифференцируемость; условия Коши – Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной; конформность. Элементарные аналитические функции и определяемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Теорема Коши для интеграла от аналитической функции по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши. Ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Ряды Тейлора. Теорема единственности для аналитических функций. Принцип максимума модуля и принцип аргумента для аналитической функции. Ряды Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции; характеристика особых точек. Вычеты; теорема Коши о вычетах.

Вопросы для вступительных испытаний

1. Тригонометрические ряды Фурье, сходимость среднеквадратическая, поточечная и равномерная.
2. Преобразование Фурье в L_1 и L_2 . Теорема Планшереля.
3. Нормированные и банаховы пространства. Три принципа линейного анализа (теоремы Хана – Банаха, Банаха – Штейнгауза, Банаха об обратном операторе).
4. Сопряженное пространство. Сопряженное для гильбертова пространства. Сопряженные для классических функциональных пространств и пространств последовательностей.
5. Измеримые функции. Сходимость почти всюду и по мере; теоремы Лебега и Рисса. Структура измеримых функций – теорема Лузина.
6. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
7. Пространство L_p , $1 \leq p < \infty$. Неравенства Гельдера и Минковского. Полнота пространства L_p . Плотность классических множеств функций в пространстве $L_p[a, b]$
8. Ряды аналитических функций. Ряд Тейлора аналитической функции.
9. Ряды Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Вычеты, теорема Коши о вычетах.
10. Принцип максимума модуля аналитической функции.
11. Теорема единственности для аналитических функций.
12. Принцип аргумента, теорема Руше.
13. Принцип симметрии Римана – Шварца.

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Введение в теорию функций действительного переменного: Мера и интеграл Лебега на прямой: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2011.
2. Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 1, 2. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004.
4. Зорич В.А., Математический анализ. Т. 1, 2. М.: МЦНМО, 2007.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Мир, 2006. 424 с.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001. 592 с.

8. Теляковский С.А. Курс лекций по математическому анализу. В 4-х тт. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. ф-те МГУ, 2002–2004. Т.1–4.

Дополнительная литература

1. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Дифференциальные свойства функций одного действительного переменного: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2013.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: Начальный курс. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: Продолжение курса. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
4. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций, М.: Наука. Т. 1, 2. Спб.: Лань 2009.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Спб.: Изд-во «Лань», 1999.
6. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
7. Стейн И., Вейс Г. Гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
8. Шабат Б.В., Введение в комплексный анализ. Т. 1, 2, М.: Наука, 1987.

2.2. Научная специальность 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Содержание программы

Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. Существование и единственность решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Линейные дифференциальные уравнения N -го порядка. Общее решение линейного однородного уравнения. Линейное неоднородное уравнение; метод вариации произвольных постоянных. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Системы линейных дифференциальных уравнений, фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формула Остроградского – Лиувилля. Неоднородные системы линейных уравнений, метод вариации произвольных постоянных. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Математические модели поперечных колебаний одномерной струны. Математические модели процессов теплопроводности.

Формула Даламбера. Формула Пуассона. Принцип максимума для уравнений параболического типа. Свойства гармонических функций.

Метод Фурье решения основных краевых задач математической физики. Теорема Стеклова.

Метод интегральных преобразований для решения основных краевых задач математической физики.

Решение уравнений эллиптического типа.

Вопросы для вступительных испытаний

1. Теорема существования и единственности решения начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения в смысле Каратеодори.

2. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теорема Флоке. Теорема о приводимости.

3. Автономные системы дифференциальных уравнений. Положения равновесия. Классификация особых точек.

4. Предельные циклы. Бифуркации рождения цикла из положения равновесия. Теорема Хопфа. Мягкие и жесткие бифуркации.

5. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Теорема об устойчивости по первому приближению.

6. Орбитальная устойчивость. Устойчивость периодических решений автономной системы. Критерий Пуанкаре орбитальной устойчивости.

7. Краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений. Самосопряженные краевые задачи. Собственные функции и собственные числа краевой задачи. Краевые задачи Штурма – Лиувилля.

8. Дифференциальные уравнения в частных производных 1-го порядка.

9. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Метод последовательных приближений. Теорема Фредгольма. Эрмитовы ядра. Теорема Гильберта – Шмидта.

10. Некорректно поставленные задачи. Интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода и методы их регуляризации. Общие методы регуляризации некорректно поставленных задач.

11. Задачи вариационного исчисления с подвижными и неподвижными границами. Необходимые условия в форме уравнений Эйлера. Достаточные условия.

12. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального быстрогодействия. Задача с закрепленным временем. Связь принципа максимума с методом динамического программирования. Уравнение Беллмана.

13. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и приведение их к каноническому виду.

14. Математические модели поперечных колебаний одномерной струны. Вывод уравнения колебания струны.

15. Математические модели процессов теплопроводности. Физический смысл граничных и начальных условий для уравнений теплопроводности.

16. Вывод формулы Даламбера.

17. Вывод формула Пуассона.

18. Принцип максимума для уравнений параболического типа.

19. Свойства гармонических функций.

20. Метод Фурье решения основных краевых задач математической физики. Общая схема метода разделения переменных. Теорема Стеклова.

21. Метод интегральных преобразований для решения основных краевых задач математической физики.

22. Уравнение Лапласа. Решение внутренней задачи Дирихле для круга.

23. Уравнение Лапласа. Решение внешней задачи Дирихле для круга.

24. Уравнение Лапласа. Решение задачи Дирихле в кольце.

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Понтрягин Л.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: URSS, 2011.
2. Шолохович Ф.А. Лекции по дифференциальным уравнениям. Екатеринбург: Уральское издательство, 2005.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебник. 4-е изд. М.: Изд-во Наука, 1977. 734 с., и другие издания. URL в библиотеке УрФУ: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468275>
4. Иванов А.О., Булычева С.В. Метод интегральных преобразований в уравнениях с частными производными. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2018. 77 с.

Дополнительная литература

1. Коддингтон Э.А. Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
2. Демидович В.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: РХД, 2000 и другие издания.
4. Пименов В.Г. Избранные главы дифференциальных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2003.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. IV М.: ГИТТЛ, 1974 и другие издания.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981 и другие издания.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
9. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: МГУ, 2000 и другие издания.
10. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983 и другие издания.
12. Фарлоу С. Дифференциальные уравнения с частными производными для научных сотрудников и инженеров. М.: Мир, 1986. 383 с.
13. Емельянов В.М., Рыбакина Е.А. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2021. 212 с URL по подписке УрФУ: <https://e.lanbook.com/reader/book/156410/#213>
14. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.:Физматлит, 2013. 352 с. URL в библиотеке УрФУ: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275562>

2.3 Научная специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Содержание программы

Определитель квадратной матрицы. Свойства определителей. Разложение определителя по минорам (теорема Лапласа).

Линейные пространства. Линейная зависимость элементов. Базис и размерность пространства. Размерность суммы пространств. Прямая сумма, разложение линейного пространства в прямую сумму одномерных подпространств.

Матрицы и действия с ними. Теорема о ранге матрицы. Определитель произведения матриц. Обратная матрица.

Системы линейных уравнений. Теорема Крамера. Критерий совместности и строение общего решения совместной системы линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений, фундаментальная система решений.

Линейные операторы. Размерности ядра и образа линейного оператора. Собственные числа и векторы, теорема о связи собственных чисел линейного оператора с корнями его характеристического уравнения. Приведение матрицы (линейного оператора) к жордановой форме.

Евклидовы и унитарные пространства. Процесс ортогонализации, ортонормированный базис. Разложение пространства в прямую сумму пространства и его ортогонального дополнения.

Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к нормальному виду. Закон инерции. Положительная определенность; критерий Сильвестра.

Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов; применение для вычисления площадей и объемов. Двойное векторное произведение векторов; тождество Якоби.

Преобразование координат на плоскости и в пространстве. Классификация кривых и поверхностей второго порядка.

Формулы и базис Френе плоской кривой. Функция кривизны кривой. Эволюта и эвольвента.

Кривые в трехмерном пространстве. Ориентация трехмерного пространства. Репер Френе кривой общего положения. Теорема существования и единственности кривой и данными функциями кривизны.

Поверхности в аффинном пространстве. Касательные пространства. Первая фундаментальная форма поверхности; длина дуги, угол между кривыми, площадь (объем) поверхности.

Внешняя геометрия поверхности. Вторая фундаментальная форма и основной оператор поверхности. Кривизны: нормальная, главная, полная (гауссова), средняя.

Внутренняя геометрия поверхности. Уравнения Гаусса – Петерсона – Кодацци. Тензоры кривизны и теорема Гаусса.

Геодезические. Экстремальное свойство геодезических.

Условия, эквивалентные условию минимальности. Вполне упорядоченные множества. Сравнение трансфинитных чисел. Порядковый тип множества ординалов, меньших данного. Мощность множества ординалов данной мощности. Аксиома выбора и эквивалентные ей утверждения.

Определение универсальной алгебры, подалгебры и подалгебры, порожденной данным множеством элементов. Конгруэнции на универсальной алгебре. Теорема о гомоморфизме. Теоремы об изоморфизмах.

Конгруэнции на группе, кольце, нормальная подгруппа в группе и идеал в кольце.

Теоремы вложения: коммутативной полугруппы в группу, области целостности в поле, группы в группу подстановок.

Решетки как универсальные алгебры. Булевы алгебры и булевы кольца. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

Кольцо главных идеалов. Теорема о разложении его элементов на неприводимые множители. Модули над кольцом главных идеалов. Подмодуль свободного модуля. Теорема об инвариантных множителях. Строение конечнопорожденного модуля.

Комбинаторика: принцип включения-исключения; числа Каталана, числа Стирлинга, числа Белла; формула Эйлера-Маклорена, формула Стирлинга; рекуррентные соотношения, теорема об общем решении для однородных соотношений с постоянными коэффициентами.

Теория графов: эйлеровы и гамильтоновы циклы, теоремы Эйлера и Оре; планарность, теоремы Эйлера и Понтрягина-Куратовского; раскраски, теоремы Брукса и Хивуда.

Алгебра логики: булевы функции, нормальные формы, полиномы Жегалкина; полные системы, замкнутые классы, теорема Поста.

Логика и теория алгоритмов: формализация логики первого порядка (исчисления предикатов); сколемовская нормальная форма; метод резолюций; теорема компактности, теорема Гёделя о полноте; рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые множества; машины Тьюринга, тезис Чёрча, алгоритмически неразрешимые проблемы; вычислительная сложность алгоритма и задачи; классы сложности P, NP, PSPACE; сводимость и полнота в классах сложности.

Автоматы и языки: детерминированные и недетерминированные конечные автоматы, теорема Рабина-Скотта; регулярные языки, теорема Клини; минимальные автоматы, теорема Майхилла-Нероуда; контекстно-свободные грамматики и языки, теорема о подстановке, лемма о накачке; МП-автоматы, теорема о распознавании класса контекстно-свободных языков.

Комбинаторные алгоритмы: жадные алгоритмы (алгоритм Краскала, алгоритм Дейкстры); алгоритмы разделяй-и-властвуй (быстрое умножение, быстрое преобразование Фурье); динамическое программирование (алгоритм Форда-Беллмана, алгоритмы укладки рюкзака); потоки (теорема и алгоритм Форда-Фалкерсона).

Теория информации: Информация и энтропия, теорема Шеннона о кодировании источника.

Линейное программирование: постановка задачи; симплекс-метод; подномиальное решение задачи линейного программирования; двойственная задача, теорема двойственности.

Вопросы для вступительных испытаний

1. Разложение группы по двойному модулю. Индекс подгруппы. Теоремы Лагранжа и Пуанкаре. Сопряженность комплексов. Нормальные подгруппы. Нормализатор и централизатор комплекса. Число комплексов, сопряженных с данным.
2. Нормальные и субнормальные ряды. Лемма Куроша – Цассенхауза. Теорема Шрейера об изоморфных уплотнениях субнормальных рядов. Теорема Жордана – Гельдера.
3. Абелевы группы. Строение свободной абелевой группы. Подгруппы свободных абелевых групп.
4. Теоремы Силова для конечных групп.
5. Нильпотентные группы. Теорема Бернсайда – Виланда.
6. Свободные группы: построение, лемма о порождающих подгруппы и шрейеровых системах, теорема о подгруппах.
7. Коммутативные нётеровы кольца. Теорема Гильберта о базисе.
8. Радикал кольца. Определение и свойства. Радикал кольца матриц.
9. Полупростые артиновы кольца. Первая теорема Веддербарна – Артина.
10. Теорема Машке.
11. Вторая теорема Веддербарна – Артина.
12. Алгебры Ли. Теорема Энгеля.

13. Дистрибутивные и модулярные решетки. Критерии дистрибутивности и модулярности.
9. Модулярные решетки: теорема об изоморфизме интервалов. Теорема Куроша – Оре.
10. Полумодулярные решетки. Теорема Жордана – Гёльдера.
11. Геометрические решетки.
12. Принцип включения-исключения, вывод формулы для числа разбиений.
13. Формула Эйлера-Маклорена, ее вывод, вычисление сумм на ее основе.
14. Формула Стирлинга, ее вывод и применение.
15. Рекуррентные соотношения, теорема об общем решении для однородных соотношений с постоянными коэффициентами.
16. Эйлеров цикл, теорема Эйлера для неориентированного и ориентированного случаев.
17. Гамильтонов цикл, теорема Оре.
18. Планарные графы, теорема Эйлера о многогранниках.
19. Критерий планарности графа.
20. Раскраски графов, теорема Брукса.
21. Раскраски плоских графов, теорема Хивуда.
22. Булевы функции, нормальные формы и полиномы Жегалкина.
23. Полные системы булевых функций, замкнутые классы и теорема Поста.
24. Формализация логики первого порядка (исчисления предикатов), теорема о сколемовской нормальной форме.
25. Метод резолюций в логике первого порядка.
26. Теорема Гёделя о полноте логики первого порядка.
27. Рекурсивные функции и рекурсивно перечислимые множества.
28. Машины Тьюринга, примеры алгоритмически неразрешимых проблем.
29. Вычислительная сложность алгоритма и задачи, классы сложности P, NP, PSPACE.
30. Сводимость и полнота в классах сложности P, NP, PSPACE.
31. Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы, теорема Рабина-Скотта.
32. Регулярные языки и конечные автоматы, теорема Клини.
33. Теорема Майхилла-Нероуда и построение минимального детерминированного автомата.
34. Контекстно-свободные грамматики и языки, теорема о подстановке.
35. Контекстно-свободные грамматики и языки, лемма о накачке.
36. МП-автоматы, теорема о распознавании класса контекстно-свободных языков.
37. Жадные алгоритмы, определение и анализ алгоритмов Краскла и Дейкстры.
38. Алгоритмы разделяй-и-властвуй и оценки сложности на примере быстрого умножения.
39. Быстрое преобразование Фурье.
40. Динамическое программирование, определение и анализ сложности алгоритма Форда-Беллмана и алгоритма укладки рюкзака
41. Потoki в графах, теорема и алгоритм Форда-Фалкерсона.
42. Информация и энтропия, теорема Шеннона о кодировании источника.
43. Постановка задачи линейного программирования, симплекс-метод.
44. Полиномиальное решение задачи линейного программирования.
45. Двойственная задача линейного программирования, теорема двойственности.

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2020.
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. СПб.: Лань, 2020.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит. 2019.
4. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. Основы математической логики. Ленанд. 2017.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.1. Основы алгебры. М.: МНЦМО. 2020.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.2. Линейная алгебра. М.: МНЦМО. 2018.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2021.
8. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2021.
9. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. Основания информатики. СПб.: Вильямс, 2016.
10. Т.Х. Кормен, Ч.И. Лейзерсон, Р.Л. Ривест, К. Штайн. Алгоритмы. Построение и анализ. СПб.: Вильямс, 2014.

Дополнительная литература

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 2-е изд., стер. СПб.: Лань, 2009.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. 7-е изд., стер. М.: Физматлит, 2009.
3. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука. 1987.
4. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. М.: Изд. МГУ. 1990.
5. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. 7-е изд., стер. СПб.: Лань, 2020.
6. Ф.А. Новиков. Дискретная математика для программистов. 3-е изд. СПб.: Питер, 2009.
7. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука, 1983.
8. М. Холл. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
9. Данциг Д. Линейное программирование, его применения и обобщения. - М., Прогресс, 1966.
10. А.В. Ахо, М.С. Лам, Р. Сети, Дж.Д. Ульман. Компиляторы. Принципы, технологии и инструментарий. 2-е изд. СПб.: Вильямс, 2008.
11. Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика. СПб.: Вильямс, 2004.
12. Замятин А.П., Шур А.М. Языки, грамматики, распознаватели. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2007.
13. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. М.: МЦНМО, 2000.
14. J. Kleinberg, E. Tardos. Algorithm design. NY: Pearson, 2006.
15. R.L. Graham, M. Grotscchel, L. Lovasz. Handbook of Combinatorics, Volume 1. Elsevier, 1995.
16. J.L. Gross, J. Yellen. Handbook of Graph Theory. CRC Press, 2003.

2.4 Научная специальность 1.1.6. Вычислительная математика

Содержание программы

Численные методы: методы решения систем линейных уравнений, точные и итерационные; методы решения нелинейных уравнений и систем; интерполяционный многочлен в формах

Ньютона и Лагранжа; метод наименьших квадратов; численное дифференцирование; численное интегрирование; численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений; сеточные методы решения задач математической физики, некорректные задачи и способы их регуляризации.

Вопросы для вступительных испытаний

1. Точные и итерационные методы решения систем линейных уравнений.
2. Численные методы решения нелинейных уравнений и систем.
3. Интерполяционный многочлен в формах Ньютона и Лагранжа.
4. Метод наименьших квадратов.
5. Численное дифференцирование.
6. Численное интегрирование.
7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.
8. Сеточные методы решения задач математической физики.
9. Некорректные задачи и способы их регуляризации.

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
2. Пименов В.Г. Численные методы. Часть 1. Екатеринбург: Изд.-во Урал. Ун-та, 2013
3. Пименов В.Г., Ложников А.Б. Численные методы. Часть 2. Екатеринбург: Изд.-во Урал. Ун-та, 2014.

Дополнительная литература

4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. 2006.
5. Самарский А.А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
6. Васин В.В. Основы теории некорректных задач. Издательство Сибирского отделения РАН.

2.5 Научная специальность 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Содержание программы

Общие теоремы динамики для систем. Теорема об изменении импульса. Теорема об изменении кинетического момента. Теорема об изменении кинетической энергии.

Тензор инерции и его свойства. Главные оси инерции. Эллипсоид инерции. Вычисление кинетического момента и кинетической энергии твердого тела с неподвижной точкой.

Принцип Даламбера – Лагранжа для механической системы, стесненной идеальными связями. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Голономные системы. Уравнения Лагранжа второго рода. Первые интегралы уравнений Лагранжа: обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби), циклические координаты и циклические интегралы.

Канонические переменные. Уравнения Гамильтона. Свойства уравнений Гамильтона: интеграл энергии, циклические интегралы и понижение порядка в уравнениях Гамильтона.

Устойчивость по Ляпунову. Основные понятия и определения. Два метода исследования устойчивости. Общие теоремы второго метода Ляпунова: теоремы об устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Устойчивость по первому приближению. Понятие о критических случаях. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия и ее обращение.

Колебания механической системы около положения равновесия. Нормальные координаты. Влияние на устойчивость положения равновесия диссипативных и гироскопических сил (теоремы Кельвина). Вынужденные колебания. Резонанс.

Модель упругого тела. Закон Гука. Полная система уравнений теории упругости.

Свободные колебания линейных систем с конечным числом степеней свободы. Вынужденные колебания линейных систем с конечным числом степеней свободы. Уравнение частот. Собственные частоты колебаний упругих систем и их свойства. Методы определения собственных частот. Главные формы колебаний упругих систем. Виброзащита.

Вопросы для вступительных испытаний

1. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона – Якоби, полный интеграл.
2. Принцип наименьшего принуждения Гаусса. Принцип наименьшей кривизны Герца. Принцип Гамильтона. Принцип наименьшего действия в формах Лагранжа и Якоби.
3. Неголономны́е системы. Возможные перемещения в случае неголономных связей. Уравнения движения в форме Рауса, Аппеля. Движение тел по абсолютно шероховатой поверхности (плоскости).
4. Динамика твердого тела. Постановка задачи о движении тяжелого твердого тела. Первые интегралы. Случай Эйлера – Пуансо, Лагранжа – Пуассона. Регулярные прецессии. Перманентные вращения и их устойчивость.
5. Скобка Пуассона и ее свойства. Тождество Якоби. Теорема Пуассона о первых интегралах.
6. Периодические колебания в неавтономных нелинейных системах в нерезонансном и резонансном случаях. Устойчивость периодических колебаний в неавтономных нелинейных системах.
7. Периодические колебания в автономных нелинейных системах. Бифуркации Ляпунова – Пуанкаре и Андронова – Хопфа. Устойчивость периодических колебаний в автономных нелинейных системах. Теорема Андронова – Витта.
8. Почти периодические колебания в нелинейных системах. Метод усреднения Крылова – Боголюбова. Устойчивость почти периодических колебаний в нелинейных системах.
9. Параметрический резонанс. Автоколебания. Метод фазовой плоскости. Понятие о предельном цикле. Метод малого параметра Пуанкаре. Метод усреднения. Теорема об обосновании метода усреднения.
10. Линейные управляемые системы. Принцип максимума и вариационное исчисление. Метод динамического программирования Беллмана. Проблема оптимальной стабилизации управляемых движений. Теорема Н.Н. Красовского.

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2005.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: УРСС, 2010.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. СПб.: Издательство «Лань», 2004.

Дополнительная литература

1. Аппель П. Теоретическая механика. М.: Физматгиз, Т. 1, 2, 1960.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы. Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Бином, 2006.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.
4. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2005.

5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
6. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: УРСС, 2004.
7. Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990.
8. Парс Л. А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971.
9. Поляков Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. М.: Высшая школа, 2000.
10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
11. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
12. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.

2.6 Научная специальность 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы

Содержание программы

Классификация сил в механике сплошных сред. Теорема Коши. Тензор напряжений. Уравнения движения сплошной среды.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Математические модели поперечных колебаний одномерной струны. Математические модели процессов теплопроводности.

Формула Даламбера.

Формула Пуассона.

Принцип максимума для уравнений параболического типа.

Свойства гармонических функций.

Метод Фурье решения основных краевых задач математической физики. Теорема Стеклова.

Метод интегральных преобразований для решения основных краевых задач математической физики.

Решение уравнений эллиптического типа.

Вопросы для вступительных испытаний

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и приведение их к каноническому виду.
2. Математические модели поперечных колебаний одномерной струны. Вывод уравнения колебания струны.
3. Математические модели процессов теплопроводности. Физический смысл граничных и начальных условий для уравнений теплопроводности.
4. Вывод формулы Даламбера.
5. Вывод формула Пуассона.
6. Принцип максимума для уравнений параболического типа.
7. Свойства гармонических функций.
8. Метод Фурье решения основных краевых задач математической физики. Общая схема метода разделения переменных. Теорема Стеклова.
9. Метод интегральных преобразований для решения основных краевых задач математической физики.
10. Уравнение Лапласа. Решение внутренней задачи Дирихле для круга.
11. Уравнение Лапласа. Решение внешней задачи Дирихле для круга.

12. Уравнение Лапласа. Решение задачи Дирихле в кольце.
13. Принципы сплошности и модель сплошных сред.
14. Уравнение неразрывности.
15. Уравнение Эйлера (вывод). Уравнения состояния.
16. Уравнение Бернулли. Примеры использования: задачи о течении идеальной жидкости по трубе переменного сечения (трубка Вентури); истечение жидкости из сосуда с отверстием.
17. Закон сохранения циркуляции скорости (теорема Томсона).
18. Потенциальные течения.
19. Интеграл Коши – Лагранжа. Присоединенная масса шара.
20. Ньютоновские и неньютоновские жидкости.
21. Уравнение Навье – Стокса для сжимаемых и несжимаемых жидкостей.
22. Примеры течения несжимаемых жидкостей: плоские течения Куэтта и Пуазейля.
23. Течения при малых числах Рейнольдса. Задача Стокса об обтекании шара.
24. Обтекание пластины вязкой жидкостью (задача Блазиуса).
25. Турбулентность. Уравнения Рейнольдса.
26. Теория Колмогорова – Обухова.
27. Турбулентный пограничный слой. Турбулентное течение в трубах.

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика (любое издание).
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебник. 4-е изд. М.: Изд-во Наука, 1977. 734 с., и другие издания. URL в библиотеке УрФУ: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468275>
3. Иванов А.О., Булычева С.В. Метод интегральных преобразований в уравнениях с частными производными. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2018. 77 с.

Дополнительная литература

1. Фарлоу С. Дифференциальные уравнения с частными производными для научных сотрудников и инженеров. М.: Мир, 1986. 383 с.
2. Емельянов В.М., Рыбакина Е.А. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2021. 212 с. URL по подписке УрФУ: <https://e.lanbook.com/reader/book/156410/#213>
3. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.:Физматлит, 2013. 352 с. URL в библиотеке УрФУ: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275562>
4. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982.
5. Д.В.Александров, А.Ю.Зубарев, Л.Ю.Искакова, Введение в гидродинамику УрФУ, 2012

4. Критерии оценки знаний претендентов на поступление в аспирантуру по группе научных специальностей 1.1. Математика и механика.

Оценка ответов претендентов на поступление в аспирантуру по данной группе научных специальностей производится по сто балльной шкале и выставляется согласно критериям, приведенным в таблице. Минимальное количество баллов, подтверждающее успешное прохождение вступительных испытаний - 30 (тридцать) баллов.

Критерии оценки ответов претендентов при поступлении в аспирантуру

Оценка	Критерии
80-100 баллов	1. Ответы на поставленные вопросы излагаются логично, последовательно и не требуют дополнительных пояснений. 2. Демонстрируются глубокие знания по дисциплине. 3. Делаются обоснованные выводы. 4. Ответ самостоятельный, при ответе использованы знания, приобретённые ранее.
60-79 баллов	1. Ответы на поставленные вопросы излагаются систематизировано и последовательно. 2. Демонстрируется умение анализировать материал, однако не все выводы носят аргументированный и доказательный характер. 3. Материал излагается уверенно, в основном правильно даны все определения и понятия. 4. Допущены небольшие неточности при выводах и использовании терминов.
30-59 баллов	1. Допускаются нарушения в последовательности изложения при ответе. 2. Демонстрируются поверхностные знания дисциплины. 3. Имеются затруднения с выводами. 4. Определения и понятия даны не чётко.
0-29 баллов	1. Материал излагается непоследовательно, сбивчиво, не представляет определённой системы знаний по дисциплине. 2. Не даны ответы на дополнительные вопросы комиссии. 3. Допущены грубые ошибки в определениях и понятиях.

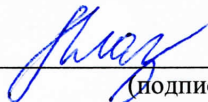
4. Рекомендуемые Интернет-ресурсы

1. Государственная публичная научно-техническая библиотека России URL: <http://www.gpntb.ru/>.
2. Научная электронная библиотека <http://www.eLIBRARY.ru/>.
3. Национальный открытый интернет-университет «ИНТУИТ» [сайт]. URL: www.intuit.ru;
4. Российская Государственная библиотека URL: <http://www.rsl.ru/>.
5. Российская национальная библиотека URL: <http://www.nlr.ru/>.
6. Российский портал открытого образования [сайт]. URL: www.openet.edu.ru
7. <https://mathworld.wolfram.com/topics/DiscreteMathematics.html>
8. <https://www.wolframalpha.com/>
9. <https://mathoverflow.net/>

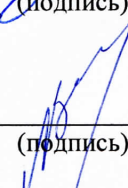
Программу вступительного испытания в аспирантуру по группе научных специальностей

1.1. Математика и механика разработали:


Зав. кафедрой математического
анализа ИЕНиМ,
кандидат физ.-мат. наук, доцент


_____ (подпись) (Глазырина П.Ю.)

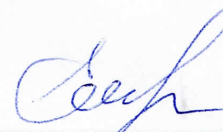
Зав. кафедрой алгебры и
фундаментальной информатики ИЕНиМ,
доктор физ.-мат. наук, профессор


_____ (подпись) (Волков М.В.)

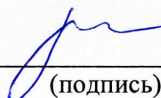
Зав. кафедрой прикладной
математики и механики ИЕНиМ,
доктор физ.-мат. наук, профессор


_____ (подпись) (Сесекин А.Н.)

Зав. кафедрой теоретической и
математической физики ИЕНиМ,
доктор физ.-мат. наук, доцент

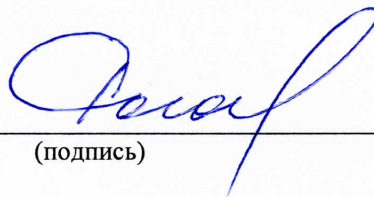

_____ (подпись) (Елфимова Е.А.)

Зав. кафедрой вычислительной
математики и компьютерных наук ИЕНиМ,
доктор физ.-мат. наук, профессор


_____ (подпись) (Пименов В.Г.)

Лист согласования

Директор ИЕНиМ
(название института)



(подпись)

(Рогожин С.А.)